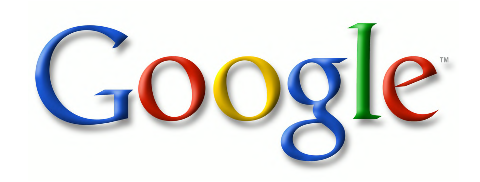
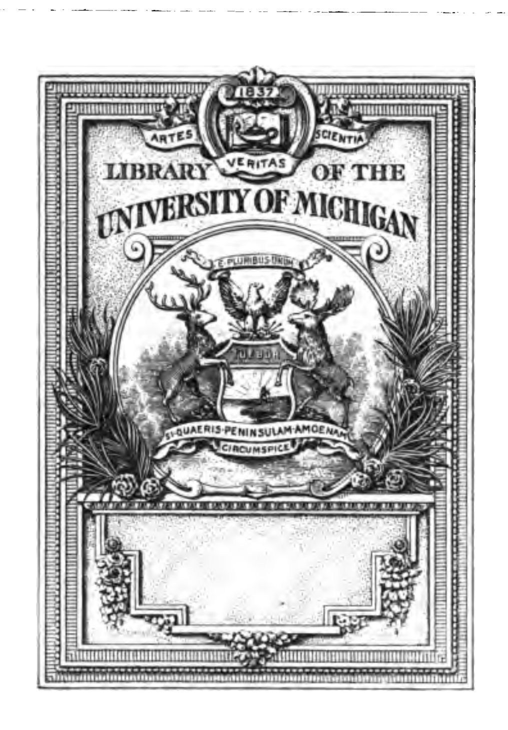




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur
de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques,
Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE

TOME CINQUIÈME

Année 1886.



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1886

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

LA PREMIÈRE LEÇON DE CALCUL INTÉGRAL

Par M. **G. de Longchamps.**

On sait que le calcul intégral débute par une difficulté qui porte sur l'établissement de cette propriété fondamentale : *toute fonction continue* f(x) *a une intégrale.*

La démonstration ordinaire donne prise à une objection, parce qu'elle exige la connaissance de l'aire des contours curvilignes fermés. Les ouvrages élémentaires (*) glissent sur la difficulté qui se présente dans la géométrie élémentaire quand on aborde le problème si délicat des quadratures, et se borne à définir l'aire du cercle au moyen des polygones inscrits et circonscrits dont chaque côté décroît indéfiniment.

(*) Voyez *Géométrie* de Briot, p. 202. — *Id.* Rouché et de Comberousse, éd. 4, p. 281. — Les formules de Simpson et de Poncelet qui sont données plus loin (p. 294 et 296), donnent bien des expressions abrégées de l'aire comprise entre une courbe, un axe et deux ordonnées ; mais la définition de l'aire ne nous semble pas établie.

M. Catalan dans ses *Éléments de Géométrie*, éd. 2, p. 169, aborde cette question délicate et dit : « Mais alors se présente cette question : en employant des rectangles comme dans le premier mode et en employant des polygones comme dans le second, arrivera-t-on à la même limite ? Et même, en conservant le second procédé, comme on peut concevoir une infinité de séries de polygones, toutes ces séries conduiront-elles à la même limite ?

« La réponse est affirmative ; mais la démonstration complète de l'identité des résultats ne semble pas pouvoir être établie sans le secours du calcul intégral... »

Voyez aussi, sur ce point : *Géométrie* de Tombeck, p. 235 ; *Géométrie* de Combette, p. 311 ; *Géométrie* de Vacquant, p. 294. Dans tous ces traités la définition donnée pour l'aire ne s'applique qu'à celle du cercle ; le cas général n'est, avec raison d'ailleurs, pas abordé.

Pour le surplus, ils renvoient au calcul intégral ; mais il ne faut pas alors que celui-ci prenne pour base de sa première définition un principe que les élémentaires n'établissent pas avec la rigueur et la généralité qu'on est en droit d'exiger.

Néanmoins cette introduction au calcul intégral, critiquable pour les motifs que nous venons de rappeler, offre l'avantage, toujours appréciable, d'être extrêmement simple ; et nous avons cru, pour cette raison, devoir la reproduire dans l'ouvrage (*) que nous avons récemment publié, quand nous avons abordé, parmi les matières introduites dans le nouveau programme des examens d'entrée à l'Ecole Polytechnique, la *notion de l'intégrale définie.*

Il faut pourtant reconnaître qu'il y a là un point bien délicat et que la démonstration que nous venons de rappeler, si particulièrement importante, puisqu'elle est la base même du calcul intégral, laisse quelques doutes dans un esprit qui veut être complètement satisfait. Nous allons reproduire dans cette petite note (**) la démonstration que M. Jordan (***) a donnée et de la propriété en question.

1. Définition de l'intégrale définie.— Soit $f(x)$ une fonction donnée, continue (****) dans l'intervalle (a, b) ; prenons,

---

(*) *Supplément au Cours de Mathématiques spéciales.*

(**) Nous n'ajoutons, dans la présente note, rien d'essentiel à la démonstration de M. Jordan ; mais la forme de la rédaction est assez profondément modifiée, parce que, comme nous le disons plus loin, nous ne nous accordons pas la notion de la fonction uniformément continue. Une partie de ces modifications nous a été indiquée par un de nos collègues, M. Hubert, professeur au lycée de Versailles.

(***) C. Jordan : *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* ; Gauthier-Villars, 1882 ; t. II, 52.

(****) Nous supposons que la fonction est *continue* dans le sens ordinaire de ce mot et non *uniformément continue* comme paraît l'exiger la démonstration de M. Jordan. Celui-ci d'ailleurs *(loc. cit.)* énonce le fait que *toute fonction continue est aussi uniformément continue ;* mais il renvoie pour la démonstration au tome III de son *Cours d'analyse*, lequel n'a pas encore paru, croyons-nous. On trouvera une démonstration de cette propriété dans l'ouvrage que M. Tannery vient de faire paraître, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 106. (Librairie Hermann, 8, rue de la Sorbonne.)

Voici la distinction qui existe entre les fonctions continues et les fonctions uniformément continues.

Pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit uniformément continue, il faut que

entre a et b, deux valeurs x_0, X et, dans cet intervalle, inscrivons p moyens, x_1, x_2,... x_p; de telle sorte que nous ayons

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\, x_p < x; \qquad (A)$$

puis, considérons l'expression U

$$U = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) \ldots + (X - x_p)f(x_p) \ldots :$$

Si nous imaginons que p croisse indéfiniment et de telle façon que l'intervalle entre deux termes consécutifs quelconques de la suite (A) tende vers zéro, la limite vers laquelle tend la quantité U s'appellera l'intégrale définie de $f(x)$ pour l'intervalle considéré (x_0, X).

Mais cette définition ne peut être acceptée que si nous établissons successivement les points suivants :

1° *L'expression* U *a une limite;*

2° *Cette limite est indépendante de la loi d'insertion des moyens.*

Nous aurons encore à montrer quelle est la signification de la fonction U et nous établirons enfin que *la dérivée de* U *par rapport à* X *est égale à* f(X).

2. Théorème I. — *L'expression algébrique* U *a une limite.*

Nous supposerons que $f(x)$ est une fonction croissante (*) dans l'intervalle (x_0, X); s'il en était autrement on diviserait cet intervalle en plusieurs autres séparés par les valeurs limites.

Pour reconnaître que, dans ces conditions, U a une limite, nous allons montrer que U est une fonction croissante restant inférieure à un nombre donné.

---

l'on puisse assigner un nombre fixe ε, désigné d'avance et tel que la différence

$$f(x + h) - f(x)$$

soit plus petite que ε, h étant choisi suffisamment petit, et cela pour toutes les valeurs de x prises dans l'intervalle considéré.

Il n'est pas évident que le nombre ε, nombre qui doit être le même pour toutes les valeurs de x, existe nécessairement. Il y a donc là matière à démonstration ; mais les développements qu'on va lire ne soulèvent pas cette question délicate.

(*) Si l'on ne veut pas faire cette hypothèse, on remplacera dans la démonstration qui suit les différences telles que (A — B), par *mod* (A — B), expression qui, comme l'on sait, représente la valeur absolue de la différence A — B. Suivant la notation commode proposée par M. Tannery *(loc. cit.)* le module de A — B se réprésente aussi par | A — B |.

Insérons entre x_i et x_{i+1} un moyen ξ et considérons la nouvelle fonction U_1 :

$$U_1 = \dots (\xi + x_i) f(x_i) + (x_{i+1} - \xi) f(\xi) \dots$$

Nous avons donc

$$U_1 - U = (\xi - x_i)f(x_i) + (x_{i+1} - \xi)f(\xi) - (x_{i+i} - x_i)f(x_i),$$

ou

$$U_1 - U = (x_{i+1} - \xi)\{f(\xi) - f(x_i)\}.$$

Les deux facteurs qui constituent le second membre de cette identité sont positifs, et nous pouvons écrire

$$U_1 > U.$$

Ainsi la fonction U est croissante quand on augmente le nombre des moyens.

Pour établir que U a une limite il faut encore reconnaître que cette fonction ne croît pas indéfiniment. A cet effet, considérons la suite

$$f(x_0), \quad f(x_1) \dots \quad f(x_p).$$

Tous les termes de cette suite sont inférieurs à $f(X)$, la fonction $f(x)$ étant supposée croissante; écrivons donc

$$U < (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_p - x_{p-1} + X - x_p)f(X),$$

ou

$$U < (X - x_0)f(X).$$

Cette inégalité prouve que U ne croît pas indéfiniment; d'ailleurs U, comme nous l'avons montré, est une fonction croissante; finalement, U a une limite.

(A suivre.)

SUR LE POINT DE STEINER

Par **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

Soient $A_1A_2A_3$ un triangle quelconque, O le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité, H le point de concours des hauteurs, E l'ellipse circonscrite dont le centre est en G. Le cercle O et l'ellipse E ont un quatrième point commun R dont Steiner a signalé les propriétés suivantes (*):

(*) *Journal de Crelle* t. XXXII, p. 300; *Journal de Borchardt*, t. LXVII, p. 237; *Steiner's Gesammelte Werke*, t. II, p. 689.

Les cercles osculateurs à l'ellipse E *aux points* A_1, A_2, A_3 *se coupent en* R (*).

La normale menée par R *à l'ellipse passe par le symétrique de* H *par rapport à* G.

Le point R *appartient aux trois circonférences qui passent par un sommet du triangle* $A_1A_2A_3$ *et par les symétriques des deux autres sommets pris par rapport à* G.

Ce point est identique à celui que M. Tarry (**) a désigné par la lettre R. Cependant ce fait paraît avoir passé inaperçu.

Nous proposons pour ce point la dénomination de point de Steiner.

La présente note a pour objet l'étude des propriétés du point de Steiner et de quelques autres points qui s'y rattachent.

1. Cherchons d'abord les coordonnées de R.

Les équations du cercle O et de l'ellipse E, en *coordonnées normales* (distances d'un point aux côtés du triangle de référence) étant

$$\frac{a_1}{\delta_1} + \frac{a_2}{\delta_2} + \frac{a_3}{\delta_3} = 0, \qquad \frac{a_2a_3}{\delta_1} + \frac{a_3a_1}{\delta_2} + \frac{a_1a_2}{\delta_3} = 0,$$

les coordonnées de R sont inversement proportionnelles aux quantités

$$a_1(a_2^2 - a_3^2), \quad a_2(a_3^2 - a_1^2), \quad a_3(a_1^2 - a_2^2).$$

Les coordonnées barycentriques (***) de R sont inversement proportionnelles aux différences

$$a_2^2 - a_3^2, \quad a_3^2 - a_1^2, \quad a_1^2 - a_2^2$$

ou aux produits

$$\sin A_1 \sin (A_2 - A_3), \ \sin A_2 \sin (A_3 - A_1), \ \sin A_3 \sin (A_1 - A_2).$$

(*) Nous avons signalé une généralisation de ce théorème dans la *Revue de l'Instruction publique en Belgique*, année 1866, et dans la *Nouvelle Correspondance de Catalan*, t. IV, p. 399. On peut aussi comparer : *Journal de Crelle*, t. XXXVI, p. 95 (Joachimsthal), *Nouvelle Correspondance*, t. IV, p. 393 (G. de Longchamps), et la question du concours d'agrégation des sciences mathématiques de 1882 *(Nouvelles Annales*, 1884, p. 273).

(**) Congrès de Rouen, communication de M. Brocard.

(***) Les coordonnées barycentriques μ_1, μ_2, μ_3 d'un point M sont proportionnelles aux masses qui, appliquées aux points A_1, A_2, A_3, ont pour centre de gravité le point M. On a

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = a_1\delta_1 : a_2\delta_2 : a_3\delta_3.$$

On en déduit, si R_1, R_2, R_3 sont les points de rencontre de RA_1, RA_2, RA_3 avec a_1, a_2, a_3 :

$$\frac{R_2A_1}{A_3R_1} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}, \text{ etc.}$$

2. Quelques propriétés du point de Steiner résultent, très simplement, de l'application des transformations quadratiques au cercle O et à l'ellipse E. Nous ferons usage de la transformation par polarité trilinéaire, de la transformation isogonale et de la transformation isotomique.

Si $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ est l'équation d'une droite n rencontrant les côtés du triangle fondamental A_1, A_2, A_3 en N_1, N_2, N_3, les conjuguées harmoniques des droites A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 par rapport aux angles A_1, A_2, A_3 du triangle ont pour équations $u_2x_2 - u_3x_3 = 0, \ldots$; elles concourent en un même point N dont les coordonnées sont $\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}$. Nous dirons, avec M. Mathieu (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 399), que N est le *pôle trilinéaire* de n, que n est la *polaire trilinéaire* de N. Si nous convenons d'appeler coordonnées d'une droite les coefficients u_1, u_2, u_3 de son équation, les coordonnées du pôle d'une droite sont inversement proportionnelles à celles de cette droite.

D'après cela, si l'on considère l'équation d'une conique U circonscrite au triangle de référence $A_1A_2A_3$:

$$\frac{L_1}{x_1} + \frac{L_2}{x_2} + \frac{L_3}{x_3} = 0, \qquad (1)$$

on voit que la polaire trilinéaire d'un point quelconque (x_1, x_2, x_3) de cette courbe passe par un point fixe dont les coordonnées sont L_1, L_2, L_3. Ce point fixe que nous appellerons *pôle d'homologie* de U, est le centre d'homologie de $A_1A_2A_3$ et du triangle $T_1T_2T_3$, formé par les tangentes aux points A_1, A_2, A_3 à la conique.

On verra, de la même manière, que la conique U est l'enveloppe des polaires trilinéaires, par rapport au triangle circonscrit $T_1T_2T_3$, d'un point mobile sur l'axe d'homologie des triangles $T_1T_2T_3$, $A_1A_2A_3$.

L'équation (1) exprime aussi que la droite dont les coordon-

nées sont $-\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ passe par le point T_1 ($-L_1, L_2, L_3$). Donc si une droite quelconque menée par T_1 rencontre A_1A_2, A_1A_3 aux points T'_3, T'_2, le point d'intersection des droites $A_3T'_3$, $A_2T'_2$ engendre la conique U (cas particulier du théorème de Maclaurin).

Appliquons ces notions au cercle O et à l'ellipse E. Soient $K_1K_2K_3$, $G_1G_2G_3$ les triangles polaires de $A_1A_2A_3$ par rapport à ces courbes. Le pôle d'homologie du cercle est le point de Lemoine K. Celui de l'ellipse est le centre de gravité G; les axes d'homologie sont, respectivement, la polaire k de K par rapport au cercle, et la droite à l'infini g. Par conséquent : 1° *le point de Steiner est le pôle trilinéaire de la droite joignant le point de Lemoine au centre de gravité;* 2° *les droites* K_1G_1, K_2G_2, K_3G_3 *se confondent avec les côtés du triangle* $R_1R_2R_3$.

(A suivre.)

NOTE SUR QUELQUES POINTS REMARQUABLES

DU PLAN DU TRIANGLE *ABC*

Par **Em. Lemoine**, ancien Élève de l'École Polytechnique.

En 1873, au Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Lyon (voir les comptes rendus, p. 94), et plus en détail dans ce journal voir 1883, p. 5, 27, etc.), nous nous sommes occupé de quatre points Θ_1, Θ_a, Θ_b, Θ_c du plan d'un triangle ABC, tels que si, par l'un d'eux, on mène des parallèles aux trois côtés, elles coupent ces côtés en six points, sommets d'un hexagone circonscrit à l'une des circonférences qui touchent les trois côtés de ABC. Nous avons étudié ces points, nous avons indiqué leur construction géométrique et calculé leurs coordonnées en notant leur rapport de symétrie avec d'autres points remarquables ω_1, ω_a, ω_b, ω_c.

Nous ajouterons que ω_1 est le point que M. Brocard (voir dans ce journal, 1884, p. 207) signale comme ayant aussi

été rencontré par Hochheim dans les *Archives de Grunert*, tome LII, 1871. La question 195 du *Journal de Mathématiques élémentaires* posée par M. G. Boubals revenant à la construction que nous avons indiquée pour le point Θ_1 (par le théorème XIII, p. 52, *Journal de Mathématiques spéciales*, 1883) nous allons l'exposer ici un peu plus en détail.

On aura de même une construction des points Θ_a, Θ_b, Θ_c et par suite de ω_1, ω_a, ω_b, ω_c.

Voici l'énoncé de la question 195 dont nous venons de parler :

Par les sommets d'un triangle ABC *on mène les parallèles aux côtés opposés et par les sommets* A_1, B_1, C_1 *du triangle ainsi obtenu on mène encore les parallèles aux côtés de* ABC. *Démontrer que si, par le point de concours* Θ_1 *des bissectrices du troisième triangle* $A_2B_2C_2$, *on mène les parallèles aux côtés, ces parallèles déterminent sur les côtés du triangle* ABC *des points qui sont les sommets d'un hexagone circonscrit à un cercle.*

On voit tout d'abord que trois des côtés de l'hexagone étant sur les côtés de ABC, ce cercle est le cercle inscrit dans ABC.

Les deux triangles ABC, $A_2B_2C_2$ sont homothétiques et leur centre d'homothétie est le centre de gravité E de ABC, le rapport d'homothétie est $1/4$; pour avoir le centre Θ_1 du cercle inscrit à $A_2B_2C_2$, il faut donc joindre E au centre I du cercle inscrit à ABC, puis prendre sur EI, à partir de E et dans le sens EI : $E\Theta_1 = 4EI$.

Or, si l'on prend CB pour axe des x, CA pour axe des y, les coordonnées de E sont

$$\frac{a}{3}, \quad \frac{b}{3}.$$

Celles de I sont

$$\frac{ab}{2p}, \quad \frac{ab}{2p},$$

donc, celles de Θ_1 sont

$$\frac{a(2b-p)}{p}, \quad \frac{b(2a-p)}{p}$$

et ce sont précisément celles du point que nous avons appelé Θ_1 *loco citato*.

Les points Θ_a, Θ_b, Θ_c se construisent de même avec les centres des cercles ex-inscrits au triangle ABC.

Remarque. — On voit facilement que les distances de Θ_1 aux trois côtés BC, AC, AB sont

$$4r - h_a, \quad 4r - h_b, \quad 4r - h_c$$

et celles de Θ_c

$$4r_c - h_a, \quad 4r_c - h_b, \quad - 4r_c - h_c.$$

$$r, r_a, r_b, r_c; \quad h_a, h_b, h_c$$

désignant, comme d'ordinaire, les rayons des cercles inscrit, ex-inscrit au triangle ABC et les hauteurs.

Les distances de ω_1 aux trois côtés sont

$$\frac{2rh_a}{r_a}, \quad \frac{2rh_b}{r_b}, \quad \frac{2rh_c}{r_c};$$

de même pour ω_a, etc.

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(Suite, voir année 1885, p. 269.)

LES ANTI-DÉVELOPPÉES

40. — Imaginons une courbe U et la normale Δ en un point A pris sur cette courbe; soit ω le centre de courbure correspondant. Si nous prenons

$$AI = \omega A,$$

le lieu décrit par le point I est une certaine courbe V qu'on peut nommer l'*anti-développée* de U, pour rappeler, par ce mot, la construction précédente.

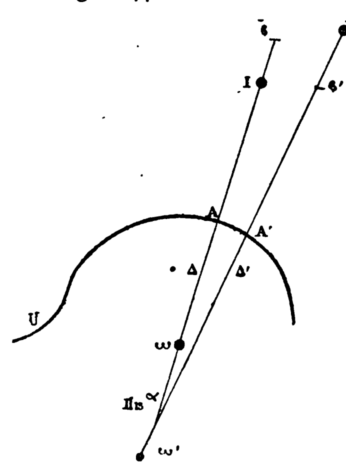
Proposons-nous de déterminer la tangente à V, au point I.

A cet effet, prenons un point A′ voisin de A et répétons, pour ce point, la construction que nous avons faite en A. Soit α le point de concours des deux normales; prenons

$$I\beta = \alpha\omega, \quad \text{et} \quad I'\beta' = \alpha\omega',$$

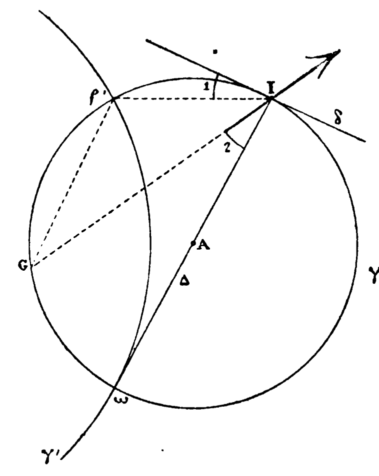
puis imaginons la parabole P tangente aux droites Δ, Δ', $\omega\omega'$,

et ββ′ a son axe parallèle à II′. En effet, si nous considérons le triangle αββ′, les droites ωω′ et II′ sont deux transversales réciproques de ce triangle et ceci (*) établit la remarque en question. Observons encore que le foyer de P appartient, par une propriété connue, au cercle γ circonscrit au triangle ωαω′.



Passons maintenant à la limite et supposons que la normale Δ′ vienne se confondre avec Δ. La limite de γ est un certain cercle γ′ bien déterminé; c'est le cercle osculateur au point ω à la courbe W, développée de V, Nous admettrons que l'on sache tracer ce cercle.

Cherchons la position limite du foyer de P. Ce point appartient encore au cercle circonscrit au triangle αββ′; mais la droite AA′ est parallèle à ββ′ et, par suite la position limite de ββ′ est constituée par une droite δ passant par I perpendiculairement à Δ. Le cercle αββ′ a donc pour limite le cercle γ″ décrit, de A comme centre, avec le rayon de courbure pour rayon.



Les cercles γ′, γ″ se coupent en un point f′ qui représente le foyer de la parabole P′, limite des paraboles P.

Du point I partent deux tangentes à P′; ce sont justement

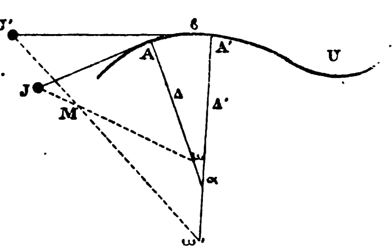
(*) Voyez *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885, p. 254, § 71.

les droites Δ, δ; si nous menons $f'G$ parallèle à Δ, les angles $\hat{1}$ et $\hat{2}$ étant égaux, le théorème de Poncelet prouve que IG est un diamètre de P'.

Concluons donc que IG représente la position limite de II'; c'est la tangente à l'anti-développée.

41. — Voici encore un lieu géométrique qui, après ce que nous venons de dire, se présente naturellement à l'esprit.

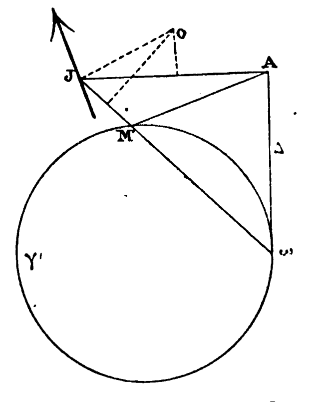
Prenons encore une courbe U et le rayon de courbure Aω, en un point A de cette courbe; puis portons cette longueur, dans un sens déterminé, *sur la tangente* au point A. Nous obtenons ainsi un point J qui décrit une certaine courbe ζ que nous allons considérer.



Prenons deux points voisins J, J' sur ζ et joignons Jω et J'ω'; les droites se coupent en un point M et le quadrilatère Mωαω' est évidemment inscriptible; soit γ le cercle circonscrit à ce quadrilatère. Observons aussi que l'égalité des angles

JMJ', ωMω', AαA', JβJ',

prouve que les quatre points J, J' β, M appartiennent à un certain cercle Γ.



Cela posé, passons à la limite et supposons que la normale Δ' vienne se confondre avec Δ. Le cercle γ devient le cercle de courbure γ' à la développée, au point ω; le point M a pour position limite le point M', commun à γ' et à ωJ; enfin le cercle Γ est représenté, à la limite, par le cercle circonscrit au triangle AM'J. Si l'on prend le point O, centre de ce cercle. la tangente cherchée (limite des droites JJ') est la perpendiculaire à OJ, au point J.

(A suivre.)

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1885

Mathématiques spéciales.

Solution par M. E. Mosnat, professeur au Lycée de Toulon.

On donne une sphère S *et sur cette sphère un cercle* C *et un point* T.

1° Démontrer qu'il y a deux paraboloïdes passant par le cercle C *et tangents à la sphère au point* T ;

2° Démontrer que les axes de ces paraboloïdes sont dans un même plan et trouver le lieu de leur point d'intersection quand le point T *se meut sur la sphère ;*

3° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu des sommets de ces paraboloïdes ;

4° Soient T *et* T′ *deux points diamétralement opposés sur la sphère* S ; *au point* T *correspondent deux paraboloïdes* P *et* Q : *au point* T′ *correspondent deux autres paraboloïdes* P′ *et* Q′. *Trouver le lieu engendré par la courbe d'intersection de chacun des paraboloïdes* P *et* Q *avec chacun des paraboloïdes* P′ *et* Q′. *quand on fait varier la direction du diamètre* TT′.

SOLUTION ANALYTIQUE

1° Prenons, pour axe des z, la droite OC qui joint les centres de la sphère S et du cercle C ; pour axes des x et des y, deux droites rectangulaires menées par O parallèlement au plan du cercle C. Les équations de la sphère et du plan du cercle seront alors

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$
$$z - h = 0.$$

Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point T situé sur la sphère ; l'équation du plan tangent en ce point sera

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2 = 0.$$

Une surface du second ordre passant par le cercle C et tangente en T à la sphère S, peut être considérée comme ayant deux courbes planes communes avec cette sphère. Son équa-

tion est donc, en désignant par λ, un paramètre arbitraire,

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) + 2(z - h)$$
$$(xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2) = 0. \qquad (1)$$

Cette surface sera un paraboloïde, si les plans du centre sont parallèles à une même droite. Or, ces plans ont pour équations

$$\lambda x + (z - h)\, x_1 = 0,$$
$$\lambda y + (z - h)\, y_1 = 0,$$
$$\lambda z + (z - h)\, z_1 + xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2 = 0,$$

et les deux premiers sont parallèles à la direction

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{-\lambda};$$

le troisième sera parallèle à cette direction, si l'on a

$$\lambda^2 + 2\lambda z_1 - (R^2 - z_1^2) = 0.$$

Telle est la condition que doit vérifier le paramètre λ, pour que l'équation (1) représente un paraboloïde.

Cette équation du second degré en λ admet toujours deux racines réelles qui sont

$$\lambda' = -z_1 - R, \qquad \lambda'' = -z_1 + R,$$

ce qui nous prouve qu'il y a deux paraboloïdes P et Q répondant à la question. Les équations de ces paraboloïdes sont :

$$(z_1 + R)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - 2(z - h)$$
$$(xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2) = 0 \qquad (P)$$
$$(z_1 - R)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - 2(z - h)$$
$$(xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2) = 0. \qquad (Q)$$

Il importe de remarquer que l'on passe de l'une de ces équations à l'autre en changeant le signe de R. Tous les calculs faits pour l'un des paraboloïdes s'appliqueront à l'autre, en changeant R en $-$ R.

2° Cherchons l'axe du paraboloïde P. Nous savons que cet axe est le diamètre conjugué du plan perpendiculaire à la direction des diamètres :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1 + R}.$$

Ses équations sont donc

$$\frac{f'x}{x_1} = \frac{f'y}{y_1} = \frac{f'z}{z_1 + R}$$

ou

$$= \frac{(z_1 + R)\,x - (z - h)\,x_1}{x_1} = \frac{(z_1 + R)\,y - (z - h)\,y_1}{y_1}$$

$$= \frac{(z_1 + R)\,z - (z - h)\,z_1 - (xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2)}{z_1 + R}$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{R\,(2z - h) - (xx_1 + yy_1 - R^2)}{(z_1 + R)^2}.$$

Les équations de l'axe du paraboloïde Q s'obtiennent en changeant le signe de R, ce qui donne :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{-R(2z - h) - (xx_1 + yy_1 - R^2)}{(z_1 - R)^2}.$$

Ces deux axes sont contenus dans le plan ayant pour équation

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$$

c'est-à-dire dans le plan passant par l'axe des z et le point T.

Supposons que le point T soit dans le plan des zy, l'axe du paraboloïde P sera dans ce plan et aura pour équation

$$\frac{x}{x_1} = \frac{R(2z - h) - (xx_1 - R^2)}{(z_1 + R)^2},$$

ou, en chassant les dénominateurs et en simplifiant,

$$2x(z_1 + R) - z_1(2z + R - h) = 0.$$

L'axe du paraboloïde Q aura pour équation, dans ce plan,

$$2x(z_1 - R) - x_1(2z - R - h) = 0.$$

On peut observer que la première droite passe par le point fixe D $\left(x = 0,\ z = \frac{h - R}{2}\right)$, lorsque T varie sur le grand cercle de S situé dans le plan zx. Dans les mêmes conditions, la seconde droite passe par le point D′ $\left(x = 0 \quad z = \frac{h + R}{2}\right)$. Ces points sont situés sur OC et sont les milieux des portions CB, CB′ de ce diamètre.

Le lieu du point de rencontre des axes, lorsque T décrit le cercle précédent, s'obtient en éliminant x_1 et z_1 entre les deux équations des axes et la suivante : $x_1^2 + z_1^2 = R^2$.

Retranchons, membre à membre, les équations des axes,

nous aurons

$$4Rx - 2Rx_1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x_1 = 2x.$$

Portons cette valeur de x_1 dans la première de ces équations, et divisons par $2x$, quantité qui n'est pas nulle, en général ; il nous viendra, en simplifiant,

$$z_1 = 2z - h.$$

Le lieu cherché a donc pour équation

$$(2x)^2 + (2z - h)^2 - R^2 = 0$$

ou

$$x^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 0.$$

C'est un cercle ayant pour centre le milieu de OC et pour rayon la moitié de celui de la sphère.

Pour obtenir le lieu du point de rencontre des axes, lorsque le point T décrit la sphère S, il suffit de faire tourner le plan zx de 360° autour de oz. Le lieu cherché est alors engendré par la révolution complète du cercle précédent autour de oz. Ce lieu est une sphère ayant même centre et même rayon que le cercle considéré. Son équation est

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right) - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 0.$$

3° Pour chercher le lieu des sommets du paraboloïde P, nous supposerons que le point T se déplace d'abord dans le plan zx. Ce lieu s'obtiendra en éliminant x_1 et z_1 entre les équations :

$$(1)\quad (z_1 + R)(x^2 + z^2 - R^2) - 2(z - h)(xx_1 + zz_1 - R^2) = 0,$$

$$(2)\quad (z_1 + R)x - x_1\left(z + \frac{R - h}{2}\right) = 0,$$

$$(3)\quad x_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0.$$

Les équations (3) et (2) peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{x_1}{R + z_1} = \frac{R - z_1}{x_1} = \frac{x}{z + \frac{R - h}{2}},$$

d'où l'on tire :

$$x_1 = \frac{2Rx\left(z + \frac{R - h}{2}\right)}{\left(z + \frac{R - h}{2}\right)^2 + x^2}; \qquad z_1 = R\,\frac{\left(z + \frac{R - h}{2}\right)^2 - x^2}{\left(z + \frac{R - h}{2}\right)^2 + x^2}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1) et simplifions ; il vient :

$$(4)\qquad \left(z+\frac{R-h}{2}\right)^2(x^2+z^2-R^2)-(z-h)\left[x^2(z-h)+(z-R)\left(z+\frac{R-h}{2}\right)^2\right]=0,$$

ou, encore,

$$x^2\left(z+\frac{R-3h}{4}\right)+(z-R)\left(z+\frac{R-h}{2}\right)^2=0.$$

Cette équation représente une courbe C^3 du 3e ordre, symétrique par rapport à l'axe des z, et asymptote à la droite $z=\frac{3h-R}{4}$. Cette droite rencontre l'axe des z au milieu de CD, car on a

$$\frac{3h-R}{4}=\frac{h+\frac{h-R}{2}}{2}.$$

La courbe C^3 est comprise entre son asymptote et la droite $z=R$, elle passe par les points cycliques et par les points du cercle C situés dans le plan zx. Le point D $\left(z=\frac{h-R}{2}\right)$ est un point double isolé.

Le lieu des sommets des paraboloïdes P, lorsque le point T décrit la sphère, est la surface de révolution obtenue en faisant tourner cette courbe autour de oz.

L'équation de cette surface est

$$(x^2+y^2)\left(z+\frac{R-3h}{4}\right)+(z-R)\left(z+\frac{R-h}{2}\right)^2=0.$$

Le lieu des sommets des paraboloïdes Q s'obtient en changeant le signe de R dans l'équation précédente. C'est une surface de révolution de même forme que la précédente et dont la méridienne a pour équation

$$x^2\left(z-\frac{R+3h}{4}\right)+(z+R)\left(z-\frac{R+h}{2}\right)^2=0.$$

Cette courbe du troisième degré D^3 symétrique par rapport à l'axe des z, est comprise entre les droites $z=-R$, $z=\frac{R+3h}{4}$.

Cette dernière droite coupe l'axe des z au milieu de CD': elle est asymptote à D^3. La courbe passe aussi par les points cycliques et admet le point D' $\left(x = 0,\ z = \frac{R + h}{2}\right)$ pour point double isolé.

4° Les équations des paraboloïdes P' et Q' correspondant au point T', diamétralement opposé de T, s'obtiennent en changeant x_1, y_1, z_1 en $x_1, -y_1, -z_1$, ce qui donne:

$$(-z_1 + R)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) + 2(z - h)(xx_1 + yy_1 + zz_1 + R^2) = 0 \qquad P'$$

$$-(z_1 + R)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) + 2(z - h)(xx_1 + yy_1 + zz_1 + R^2) = 0 \qquad Q'$$

Pour obtenir le lieu engendré par la courbe d'intersection des deux paraboloïdes P et P', lorsque la direction TT' varie, nous ajoutons, membre à membre, les équations de P et P'; il vient, en divisant par 2R,

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + 2R(z - h) = 0.$$

Ce lieu est donc une sphère passant par le cercle C et ayant pour centre le point B $(o, o, -R)$.

L'intersection des deux paraboloïdes Q et Q' engendre la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - 2R(z - h) = 0,$$

dont le centre est le point B' (o, o, R) et qui passe aussi par le cercle C.

En ajoutant les deux premiers membres des équations P et Q', il vient

$$4R^2(z - h) = 0,$$

ce qui montre que le lieu de la courbe d'intersection de ces paraboloïdes se compose du cercle C et du plan de l'infini.

Il en est de même de l'intersection des paraboloïdes P' et Q.

Nous allons maintenant reconnaître les résultats précédents, par des considérations géométriques.

(A suivre.)

QUESTION D'EXAMEN

1. — *Le nombre des solutions positives de l'équation*

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

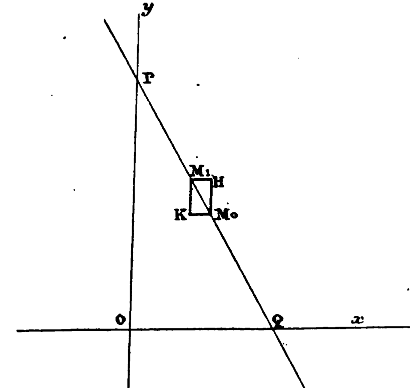
dans laquelle a, b, c, *désignent trois nombres positifs est égal au nombre des unités renfermées dans le rapport* $\frac{c}{ab}$; *ou égal à ce nombre augmenté de l'unité.*

En effet, les formules de résolution sont, comme l'on sait :

$$x = x_0 - bt, \quad y = y_0 + at;$$

dans les égalités, x_0 y_0 désignent une première solution entière et t représente un entier arbitraire.

Considérons la droite D qui correspond à l'équation (1); elle coupe les axes de coordonnées que nous supposerons d'ailleurs rectangulaires en deux points P et Q et l'on a



$$\overline{PQ}^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}$$

$$= \frac{c^2}{a^2b^2}(a^2 + b^2),$$

d'où

$$PQ = \frac{c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Soit N_0 le point qui correspond à la solution première x_0, y_0. Pour avoir la solution voisine il faut prendre $M_0H = a$, et $M_0K = b$; les parallèles aux axes de coordonnées menées par les points H et K se coupent sur PQ en un point M_1 et l'on a

$$\overline{M_1M_0}^2 = a^2 + b^2,$$

ou

$$M_1M_0 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On a donc

$$PQ = \frac{c}{ab} M_1M_o.$$

Si l'on pose

$$M_oM_1 = \theta,$$

on aura

$$\begin{cases} M_oP = u\theta + \alpha, & (o \leq \alpha < \theta) \\ M_oQ = v\theta + \beta, & (o \leq \beta < \theta). \end{cases} \qquad (1)$$

D'après cela, le nombre des segments de longueur θ compris entre les points P et Q est égal à $u + v$ et le nombre des points marqués sur PQ, points auxquels correspondent des solutions entières, est $u + v + 1$. Le nombre des solutions positives de l'équation proposée est donc égal à $u + v + 1$.

D'autre part, si l'on a

$$PQ = \mu\theta + \gamma, \quad (o \leq \gamma < \theta), \qquad (2)$$

la comparaison des formules (1) et (2) prouve que l'on a

$$u + v = \mu,$$

ou, dans d'autres cas,

$$1 + u + v = \mu,$$

suivant que $\alpha + \beta$ est compris entre zéro et θ, ou entre θ et 2θ.

Concluons donc que le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$ax + by = c \qquad (a.\ b,\ c \text{ positifs})$$

est égal, suivant les cas, au plus grand entier contenu dans $\frac{c}{ab}$, ou à ce nombre augmenté de l'unité.

Ce théorème dû à Paoli est connu depuis longtemps (*), la démonstration précédente, remarquable par son extrême simplicité, est due à M. Ed. Lucas (**). Le cas général est celui où l'on demande le nombre des solutions positives de l'équation

$$ax + by + cz + \ldots + lt = \alpha,$$

dans laquelle $a, b, c, \ldots l, \alpha$ désignent des nombres entiers positifs; $x, y, z, \ldots t$ représentant les inconnues.

(*) Voyez *Exercices d'analyse numérique*, par A. Le Besgue; 1859, p. 52.

(**) Voyez *Arithmétique de Cesaro;* lettres à M. Hermite.

Euler s'est occupé de cette question et rapporte la solution à la règle dite *Regula cœci* qu'il a nommée aussi *Regula virginum* (*).

(A suivre.) (G. L.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. VIGARIÉ, *élève externe à l'École des Mines, sur le triangle arithmétique de Pascal.*

Dans son traité général des nombres, Nicolo Tartaglia (1500-1559) a tracé la figure suivante (voir l'*Histoire des Mathématiques* de Ferdinand Hœfer, p. 342) pour montrer la formation successive des coefficients des diverses puissances du binôme à partir de la deuxième.

2
3 3
4 6 4
5 10 10 5
6 15 20 15 6
7 21 35 35 21 7
8 28 56 70 56 28 8
9 36 84 126 126 84 36 9
. . . .

Cette table se construit facilement. Elle donne le triangle arithmétique de Pascal avec beaucoup plus de symétrie que celle qui est généralement employée.

ÉCOLE CENTRALE (OCTOBRE 1885)

Géométrie analytique.

On donne dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires, OX, OY et une droite AB définie par son coefficient angulaire m et son ordonnée à l'origine b, et l'on demande :

(*) Le Besgue, *loc. cit.*, p. 77. Voyez aussi sur ce sujet : Terquem; *Nouvelles Annales*, janvier 1859, et Sylvester, *Philosophical Magazine*, nov. 1858.

1° De trouver la direction des diamètres des paraboles tangentes à l'axe des Y au point B où il est coupé par la droite AB, et ayant leurs foyers sur cette dernière droite.

2° D'écrire l'équation générale de ces courbes.

3° De construire le lieu de leurs sommets.

4° De construire le lieu des points où leurs tangentes sont parallèles à OX.

5° De construire le lieu des pôles de l'axe des X relativement aux paraboles considérées (en d'autres termes, par les deux points d'intersection de chaque parabole avec l'axe des X, on mène des tangentes à la courbe, et on demande de trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes).

Triangle.

Calculer les angles et la surface d'un triangle connaissant les trois côtés :

$$a = 2543^{m},430$$
$$b = 2332^{m},751$$
$$c = 2597^{m},808.$$

Épure.

Construire les *projections* et le *développement* de la partie de la *surface des deux nappes* d'un cône de révolution comprise entre la surface d'un cube et celle de la sphère inscrite dans ce cube; le cube et la sphère sont supposés transparents.

Le cube dont le côté a $0^{m}100$, est situé dans le dièdre antérieur supérieur, et deux de ses faces sont dans les plans de projection.

Le cône a son sommet au point le plus haut de la sphère inscrite, son axe est parallèle à la ligne de terre, et son angle au sommet est de 120°.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir un point quelconque des projections et des développements des lignes d'intersection et les tangentes en ces points.

Ces constructions seront *succinctement* expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Intersections de surfaces.

Placer la ligne de terre à égale distance des grands côtés de la feuille, et les projections du centre du cube à $0^{m}100$, du bord de gauche du cadre.

CHOIX DE QUESTIONS ORALES

POSÉES AU CONCOURS POUR L'ÉCOLE DE SAINT-ÉTIENNE EN 1885

Trouver la vraie valeur de xLx quand x tend vers zéro (sans employer la règle de l'Hôpital).

— Que pensez-vous de la série suivante?

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \text{———} + \frac{x^n}{n^n} + .$$

— Lieu des sommets des paraboles dont on donne un point et le point de rencontre des directrices et des axes.

— Lieu enveloppe du côté d'un angle droit dont l'autre côté passe par un point fixe et dont le sommet s'appuie sur une droite fixe.

— Fonction primitive de $\dfrac{1}{x^2 - 3}$.

— Quand la courbe représentée par

$$y = \sqrt{\frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x^\alpha + mx^{\alpha-1}}}$$

a-t-elle des asymptotes obliques à l'axe oy^2.

— Variations de $y = x^x$ x allant de o à ∞.

— Etablir directement la dérivée de

$$y = \text{arc tg } x^x.$$

— Construire $$\omega = \frac{\rho^2 - 2\rho + 1}{\rho + 1}.$$

— Construire $x^2 - y^2 + 2xy - x - y = 0.$ *(A suivre.)*

QUESTIONS PROPOSÉES

187. — Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y = \log x + \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

les logarithmes étant pris dans le système népérien.

188. — Même question, l'équation de la courbe étant

$$y = \log x + \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$ *(S. Realis).*

NOTA. — La question 77, dont une solution a paru dans le numéro de Décembre dernier, a été résolue par MM. Léon Clément, du lycée de Rouen; Amaury de Kerdrel, du lycée de Brest, et Henri Ferval, élève du lycée Henri IV classe de M. Macé de Lépinay).

NOTA. — L'abondance des matières nous oblige à reporter au prochain numéro un article bibliographique que nous avons consacré au livre que M. Kœhler vient de faire paraître chez Gauthier-Villars, et qui a pour titre; *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure.* Mais nous voulons pourtant signaler dès maintenant ce livre à nos lecteurs.

Le numéro en question contiendra aussi les matières et leçons qui forment le programme du concours de l'agrégation pour 1886, ce document nous ayant été demandé de divers côtés. G. L.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20020-5.

LA PREMIÈRE LEÇON DE CALCUL INTEGRAL

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 3.)

Théorème II. — *La limite de la fonction* U *est indépendante du nombre et de la loi des moyens insérés dans l'intervalle donné* x_0, X.

Cet énoncé sous-entend pourtant : 1° que le nombre des moyens augmente indéfiniment; 2° que l'intervalle entre deux moyens consécutifs quelconques tend vers zéro.

Soit

$$x_0, x_1, \ldots x_p, X, \qquad (A)$$

une première suite

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_p < X.$$

A cette suite correspond une fonction U :

$$U = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) \ldots + (X - x_p)f(x_p).$$

Prenons maintenant une deuxième suite

$$x_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, X, \qquad (B)$$

$$x_0 < \theta_1 < \theta_2 \ldots < \theta_q < X,$$

et soit V la fonction correspondante:

$$V = (\theta_1 - x_0)f(x_0) + (\theta_2 - \theta_1)f(\theta_1) + \ldots + (X - \theta_q)f(\theta_q).$$

Je suppose maintenant que l'on considère la suite des moyens x, θ et qu'on les range par ordre de grandeur croissante, ce qui donne une troisième suite

$$x_0, \theta_1, x_1, \ldots x_t, \theta_i, \theta_{i+1}, x_{t+1} \ldots \theta_q, X. \qquad (C)$$

A cette suite correspond encore une fonction W:

$$W = (\theta_1 - x_0)f(x_0) \ldots + (X - \theta_q)f(\theta_q)$$

que nous allons comparer successivement à U et à V.

Supposons qu'entre x_t et x_{t+1} il n'y ait aucun moyen θ; dans ce cas, les termes correspondants de U et de W disparaissent.

Mais, en général, nous rencontrerons, dans cet intervalle, un ou plusieurs moyens θ ; de telle sorte que dans la suite (C) nous trouverons

$$\ldots x_t, \theta_i, x_{t+1} \ldots \qquad (1)$$

ou

$$\ldots x_t, \theta_i, \theta_{i+1}, x_{t+1} \ldots \qquad (2)$$

etc.

Comparons les suites U et W dans l'intervalle de x_t à x_{t+1}.

Nous avons, dans l'hypothèse (1),

$$U \equiv \ldots (x_{t+1} - x_t)f(x_t) \ldots$$

$$W \equiv \ldots (\theta_i - x_t)f(x_t) + (x_{t+1} - \theta_i)f(\theta_i) \ldots$$

Observons que le terme mis en évidence dans U peut s'écrire

$$\left\{ (x_{t+1} - \theta_i) + (\theta_i - x_t) \right\} f(x_t).$$

Dans la différence W — U nous rencontrerons donc le terme A_t,

$$A_t = (x_{t+1} - \theta_i) \left\{ f(\theta_i) - f(x_t) \right\}$$

et nous avons, par conséquence,

$$A_t < (x_{t+1} - x_t) \left\{ f(\theta_i - f(x_t) \right\}$$

et, *à fortiori*,

$$A_t < (x_{t+1} - x_t) \left\{ f(x_{t+1}) - f(x_t) \right\}.$$

Prenons maintenant l'hypothèse qui correspond au groupement (2). Nous avons alors

$$W \equiv \ldots (\theta_i - x_t) f(x_t) + (\theta_{i+1} - \theta_i) f(\theta_i) + (x_{t+1} - \theta_{i+1}) f(\theta_{i+1}) + \ldots$$

D'autre part, U peut s'écrire

$$U \equiv \ldots (\theta_i - x_t + \theta_{i+1} - \theta_i + x_{t+1} - \theta_{i+1}) f(x_t) \ldots$$

Dans la suite W — U entre x_t et x_{t+1} se trouvent des termes dont nous désignerons l'ensemble par B_t; en posant

$$B_t = (\theta_{i+1} - \theta_i)[f(\theta_i) - f(x_t)] + (x_{t+1} - \theta_{i+1})[f(\theta_{i+1} - f(x_t)].$$

La fonction étant croissante, nous pouvons écrire

$$B_t < (\theta_{i+1} - \theta_i + x_{t+1} - \theta_{i+1})\left\{f(\theta_i) - f(x_t)\right\},$$

ou

$$A_t < (x_{t+1} - \theta_i)\left\{f(\theta_i) - f(x_t)\right\}$$

et, *à fortiori*

$$B_t < (x_{t+1} - x_t)\left\{f(x_{t+1}) - f(x_t)\right\}.$$

Le raisonnement précédent est évidemment général et peut se répéter tout le long du développement de la fonction

W — U, quel que soit le nombre des moyens θ qui se trouvent placés entre deux autres moyens x consécutifs.

Nous avons donc :

$$W - U < \Sigma (x_{t+1} - x_t)\{f(x_{t+1}) - f(x_t)\}.$$

Il est maintenant facile de conclure.

Si nous désignons par ε la plus grande des différences

$$f(x_1) - f(x_0) \ldots f(x_{t+1}) - f(x_0) \ldots$$

nous avons, *à fortiori*,

$$W - U < \varepsilon (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 \ldots - X - x_p),$$

ou

$$W - U < \varepsilon (X - x_0).$$

et finalement

$$\lim (W - U) = o.$$

Nous pourrions démontrer de même, par la comparaison des fonctions V et W, que

$$\lim (V - W) = o;$$

concluons donc que

$$\lim U = \lim V \text{ (*)}.$$

(A suivre.)

(*) Dans une note accompagnant le commencement du présent article (*Journal*, p. 3) j'ai dit que dans tous les traités de géométrie élémentaire *la définition générale de l'aire d'une courbe n'était pas abordée et* JUSTIFIÉE. Comme on me l'a fait observer, cette assertion est trop exclusive et elle ne concerne pas notamment le *Traité de Géométrie* de M. Vacquant que j'avais lu, alors, incomplètement. On trouve en effet (p. 526 et suivantes) une exposition rigoureuse, d'après une méthode due à M. Tannery, de la définition de la longueur d'un arc de courbe plane ou gauche et celle des aires des surfaces planes limitées par des contours curvilignes, avec les justifications nécessaires.

A propos du même article, nous avons reçu une lettre de M. Catalan, qui nous demande une rectification portant sur la *priorité* à laquelle il croit avoir droit, relativement à l'introduction, dans l'enseignement et dans ses ouvrages, d'une définition rigoureuse de l'aire des surfaces planes à contours curvilignes et il nous renvoie, dans ce but, à son *Traité de Géométrie* dont la première édition a paru en 1843. Il est vrai, ajoute M. Catalan dans la lettre à laquelle nous faisons allusion, que j'ai avoué mon impuissance à démontrer que *la limite est indépendante du moyen de décomposition*. Mais, il nous semble que c'est précisément là le point délicat; et la définition donnée n'est justifiée que s'il est complètement et rigoureusement établi. M. Catalan n'en a pas moins le grand mérite, si la priorité qu'il réclame est exacte, comme je le crois, d'avoir le premier soulevé ces intéressantes questions portant sur la définition de la longueur des arcs et sur celle des aires limitées par des courbes, et de les avoir résolues; sauf le point (mais encore une fois il est essentiel) qu'il avait réservé.

SUR LE POINT DE STEINER

Par **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège

(*Suite*, voir p. 6.)

4. — M étant un point quelconque du plan $A_1A_2A_3$, les symétriques des droites A_1M, A_2M, A_3M par rapport aux bissectrices des angles A_1, A_2, A_3 du triangle fondamental concourent en un même point M′, dont les coordonnées normales sont inversement proportionnelles à celles de M. Les points M et M′, qui sont les foyers d'une même conique inscrite à $A_1A_2A_3$, sont appelés *conjugués isogonaux*, ou *inverses*, ou *confocaux* (*).

L'équation (1) exprime que le point $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right)$ est situé sur la droite (L_1, L_2, L_3), qui est la polaire trilinéaire du point $\left(\frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{L_3}\right)$. Donc toute conique circonscrite au triangle de référence est la transformée isogonale de la polaire trilinéaire du point conjugué isogonal avec le pôle d'homologie de la conique.

En particulier, la circonférence $A_1A_2A_3$ est la transformée isogonale de la droite à l'infini, et l'ellipse E celle de la droite *k*. Par conséquent, *le point de Steiner est conjugué isogonal avec le point situé à l'infini sur* k.

Autrement dit, *le point de Steiner est le foyer de la parabole inscrite au triangle* $A_1A_2A_3$, *qui a pour directrice la perpendiculaire abaissée de* H *sur la droite* OK; ou encore, *la droite de Simson du point de Steiner par rapport au triangle* $A_1A_2A_3$ *est parallèle au diamètre* OK *du cercle de Brocard* (**).

Cette propriété a des corollaires importants. Soient B_1, B_2 B_3

(*) La transformation isogonale a été étudiée par M. Mathieu *(loc. cit.)*, par M. Schoute *(Bulletin de Darboux* et *Archives néerlandaises)*, etc.

(**) Théorème dû à M. Boubals. Voir *Journal de Bourget et de Longchamps, mathématiques spéciales*, 1885, p. 33.

les sommets du *premier triangle de Brocard*, ou les projections de K sur les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés de $A_1A_2A_3$; et soient r_1, r_2, r_3 les projections de R sur ces côtés. Si l'on compare les quadrilatères inscriptibles $Rr_1A_3r_2$, OB_1KB_2, on trouve facilement que les droites RA_3 et B_1B_2 sont parallèles. Par conséquent :

1° *Les parallèles menées par* A_1, A_2, A_3, *aux côtés correspondants du premier triangle de Brocard concourent au point de Steiner* R; *les perpendiculaires abaissées de* A_1, A_2, A_3, *sur les mêmes côtés se rencontrent au point* N *diamétralement opposé à* R *sur la circonférence* O (Tarry et Brocard, Congrès de Rouen); 2° *les bissectrices des angles formés par les côtés homologues des triangles inversement semblables* $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ *sont parallèles aux axes de l'ellipse* E; 3° *le point de Lemoine du triangle* $A_1A_2A_3$ *est le point de Steiner du triangle* $B_1B_2B_3$.

5. — Lorsque deux points M et N sont tels que les droites A_1M et A_1N, A_2M et A_2N, A_3M et A_3N rencontrent les côtés du triangle de référence en des points M_1 et N_1, M_2 et N_2, M_3 et N_3 qui sont symétriques par rapport aux milieux P_1, P_2, P_3 de ces côtés, nous dirons que ces points sont conjugués isotomiques ou sont réciproques par rapport au triangle $A_1A_2A_3$ (*). Les coordonnées barycentriques de N sont inversement proportionnelles à celles de M.

De là résulte l'interprétation suivante de l'équation (1):

Toute conique U *circonscrite au triangle fondamental* $A_1A_2A_3$ *a pour transformée par points réciproques la polaire trilinéaire du réciproque de son pôle d'homologie.*

En particulier, l'ellipse E est la transformée isotomique de la droite à l'infini; c'est-à-dire, si M est un point de cette courbe et N le réciproque de M, les droites A_1N, A_2N, A_3N sont parallèles. Or ces droites sont aussi parallèles à celles qui joignent les milieux P_1, P_2, P_3 des côtés de $A_1A_2A_3$ aux milieux Q_1, Q_2, Q_3 des droites A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, et d'après un théorème de Newton, le centre de la conique qui touche

(*) La transformation par points réciproques et par transversales réciproques a été étudiée par M. de Longchamps (*Annales de l'Ecole normale supérieure*, t. III, pp. 321-340).

les côtés de $A_1A_2A_3$ aux points M_1, M_2, M_3, est à l'intersection des droites P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 qui joignent les milieux des diagonales des quadrilatères circonscrits $A_1A_2M_1A_3$, $A_3M_2A_1A_2$, $A_1M_3A_2A_3$. Donc *l'ellipse* E *est le lieu du pôle d'homologie d'une parabole inscrite à* $A_1A_2A_3$, *et le point à l'infini sur l'axe de la parabole est le conjugué isogonal du pôle d'homologie* (*).

La transformée isotomique du cercle $A_1A_2A_3$ est la polaire trilinéaire du point D où se coupent les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Cette polaire est perpendiculaire à la droite OG; car le cercle, sa transformée isotomique et la polaire de G par rapport au cercle ont pour équations en coordonnées barycentriques :

$$\Sigma\, a_1^2 \mu_2 \mu_3 = 0, \qquad \Sigma\, a_1^2 \mu_1 = 0, \qquad \Sigma\, a_1^2 (\mu_2 + \mu_3) = 0,$$

et la somme des deux dernières équations donne l'équation de la droite à l'infini.

On conclut de là que *le point de Steiner est le conjugué isotomique du point à l'infini sur la direction perpendiculaire à* OG; *ou encore, les points* R_1, R_2, R_3 *sont les points de contact des côtés du triangle* $A_1A_2A_3$ *avec une parabole qui a pour directrice la droite* HGO. *Cette parabole est l'enveloppe de la polaire trilinéaire d'un point mobile sur la droite* GK (**).

(A suivre.)

(*) Ce théorème, peu connu, a été démontré autrement par Steiner. (*Gesammelte Werke*, t. I, p. 199, et *Annales de Gergonne*, t. XIX, § 10 de l'article *Développement d'une série*, etc.)

(**) GK est la polaire trilinéaire du pôle d'homologie R de la parabole. Son foyer F est le pôle trilinéaire de la droite OK. En effet, les coordonnées barycentriques du foyer à l'infini sont inverses de celles de R; par suite, ses coordonnées normales sont proportionnelles à $\dfrac{a_2^2 - a_3^2}{a_1}$, ..., et celles de F le sont aux quantités $\dfrac{a_1}{a_2^2 - a_3^2}$, ..., ou à

$$\frac{1}{\sin(A_2 - A_3)}, \qquad \frac{1}{\sin(A_3 - A_1)}, \qquad \frac{1}{\sin(A_1 - A_2)}.$$

D'autre part, l'équation de OK est

$$\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ \cos A_1 & \cos A_2 & \cos A_3 \end{vmatrix} = \Sigma\, \delta_1 \sin(A_2 - A_3) = 0.$$

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1885

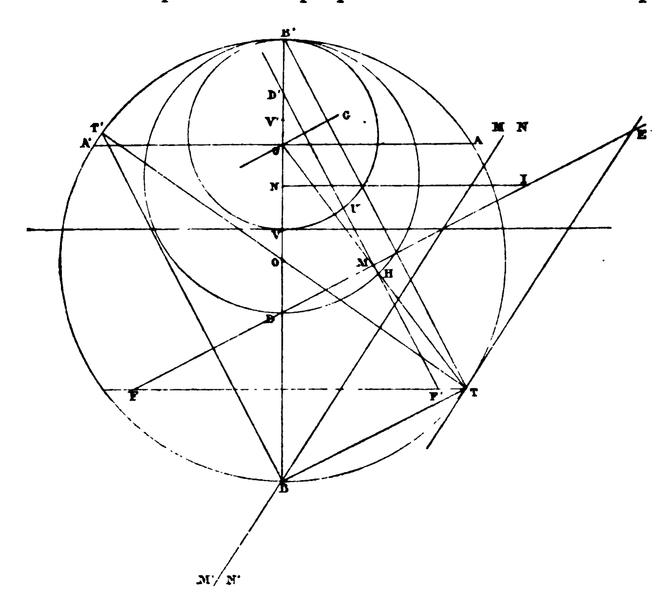
Mathématiques spéciales.

Solution par M. E. MOSNAT, professeur au Lycée de Toulon.

(*Suite*, voir p. 14.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

1° Supposons qu'on ait trouvé un paraboloïde passant par le cercle de centre C et tangent en T à la sphère S de centre O ; le plan TCO perpendiculaire aux deux plans



cycliques et passant par le centre des sections circulaires sera un plan principal de la surface.

Ce plan coupera la sphère suivant un grand cercle O, le cercle C suivant une corde AA', le plan tangent à la sphère en T suivant une droite TE et le paraboloïde suivant une parabole passant par les points A, A' et tangente en T à TE.

Proposons-nous de déterminer cette parabole. Remarquons, d'abord, que les droites AA′, TE, coupant la parabole en des points par lesquels on peut faire passer un cercle, sont également inclinées sur l'axe; ce qui prouve que l'axe est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle de ces deux droites ou à l'une des droites TB, TB′, obtenues en joignant le point T aux extrémités du diamètre OC.

Supposons que l'axe soit parallèle à TB et menons par le point C une parallèle à cette droite qui rencontre la parabole p en Q. La tangente à p en ce point est parallèle à AA′, puisque CG est le diamètre conjugué de AA′; mais, cette tangente étant symétrique de TE par rapport à l'axe, le point G est symétrique de T par rapport à l'axe. Ce point G se trouve donc sur TB′; l'axe coupe TB′ au point H, milieu de TG, et le diamètre OC au point D, milieu de BC. Ainsi, on obtient l'axe de la parabole p, en menant par le milieu de BC une parallèle à TB. Cet axe coupe la tangente en E, et le milieu I de la sous-tangente HE sera le sommet de la parabole. La parallèle à AA′ menée par T sera le rayon vecteur du point T, puisqu'elle est symétrique de la tangente TE par rapport à l'axe; elle coupera l'axe DE en un point F qui sera le foyer de la parabole.

On voit donc qu'il existe une seule parabole p répondant à la question et dont l'axe soit parallèle à TB.

On trouverait de même les éléments d'une parabole q passant par A et A′, tangente en T à TE et dont l'axe est parallèle à TB.

Cela posé, on peut déterminer un paraboloïde P et un seul en admettant p pour parabole principale et passant par le cercle C.

En effet, par un point K de cette parabole menons une perpendiculaire au plan principal et faisons passer par cette droite un plan qui y rencontre p en un second point K′, et le cercle C en deux points L et L′. Le paraboloïde sera coupé suivant une conique déterminée ayant pour axe KK′ et passant par LL′; si on fait tourner ce plan autour de la perpendiculaire, la conique engendrera le paraboloïde.

On peut, de même, déterminer le paraboloïde Q passant

par la parabole q et par le cercle C. Ainsi il est bien démontré que l'on peut trouver deux paraboloïdes P et Q, répondant à la question.

2° Ces paraboloïdes ont mêmes axes que leurs paraboles principales. Ces axes sont les droites DF, D'F' situées dans un même plan passant par OC et par le point T.

Ces droites se coupent à angle droit en M et passent par des points fixes D et D'; le lieu du point M, lorsque T décrit le cercle O, est donc la circonférence de diamètre DD'.

Si T décrit la sphère S, il suffira de faire tourner le cercle O ou la circonférence DD', autour de OC; on obtiendra pour le lieu une sphère de diamètre DD', ayant pour centre le milieu de OC et pour rayon la moitié de celui de la sphère S.

3° Cherchons le lieu des sommets du paraboloïde P, lorsque le point T décrit le cercle O.

Abaissons, du sommet I, la perpendiculaire sur BB' qui rencontre cette droite en N et B'T au point U. Les triangles semblables IHU, HTE montrent que l'on a $UH = \frac{TH}{2}$. Menons, par le point U, la parallèle à DH et BT qui rencontre BB' en V, on aura

$$\frac{VD}{UH} = \frac{BD}{HT} \quad \text{d'où} \quad VD = \frac{BD}{2} = \frac{CD}{2}.$$

Ce point V est donc le milieu de DC.

Décrivons une circonférence sur VB, comme diamètre, et supposons que le point U se déplace sur cette circonférence, le point I d'intersection des deux droites NU, DH engendrera la courbe cherchée. Cette courbe passe par le point B', admet la tangente à la circonférence en OV comme asymptote et est située au-dessus de cette droite. On peut ainsi construire la courbe trouvée analytiquement. Les mêmes raisonnements s'appliquent au lieu des sommets de Q.

Les deux courbes trouvées engendrent, en tournant autour de OZ des surfaces de révolution qui sont les lieux des sommets de P et de Q lorsque T décrit la sphère S.

4° Les paraboloïdes P'Q' correspondant au point T' diamétralement opposé de T ont leurs paraboles principales p', q' dans le plan TCT' et leurs axes sont parallèles, respective-

ment, à ceux de Q et de P. Cherchons l'intersection des paraboloïdes P et P′ dont les axes passent par le point D. Menons par le point B la parallèle aux tangentes en T et T et soient M,M′ les points d'intersection de cette droite avec la parabole p, N et N′ les points analogues pour p'. Les deux segments MM′, NN′ ont leurs milieux en B, car les droites TB, T′B étant parallèles aux axes de p et de p' sont des diamètres. Faisons maintenant passer un cercle γ par les points AA′, MM′, ce qui est possible puisque les droites AA′, MM′ sont également inclinées sur l'axe de p. Ce cercle aura son centre en B. Faisons de même passer un cercle par les points AA′, NN′, il aura aussi son centre en B. Il se confondra donc avec le cercle γ.

Le plan perpendiculaire au cercle O, mené par MM′, est parallèle au plan tangent à la sphère en T; il coupe chacun des paraboloïdes suivant un cercle de diamètre MM′. L'intersection des paraboloïdes P, P′ se compose donc du cercle C et du cercle MM′.

Si le point T décrit le cercle O, le cercle de diamètre MM dont le centre est en B décrit toute la sphère dont γ est un grand cercle.

Si le point T décrit toute la sphère S, on obtient la même sphère. Ainsi le lieu des courbes d'intersection de P et de P′ est la sphère de centre B, passant par le cercle C. On trouve, de même, que le lieu des courbes d'intersection de Q et Q′ est la sphère de centre B′ passant par le cercle C.

Enfin, les paraboloïdes P et Q′ ou P′ et Q ont leurs axes parallèles et leur intersection se compose du cercle C et d'une courbe à l'infini, et le lieu de leur intersection se compose du cercle C et du plan de l'infini.

Note. — On peut observer que le problème se ramène à un problème plan, et qu'il peut se résoudre au moyen des propriétés suivantes :

1° Les couples de cordes communes à une conique et à un cercle ont pour bissectrices des parallèles aux axes de la conique ;

2° Les quatre points communs à une parabole et à un cercle

ont pour centre des moyennes distances un point de l'axe de la parabole ;

3° Les quatre points communs à deux paraboles sont sur un cercle, quand les axes des courbes sont rectangulaires.

I et II. — Il y a deux paraboles passant par les points A et A′ et tangentes au cercle en T; leurs axes sont parallèles aux bissectrices TB et TB′ de l'angle $\widehat{ATA'}$ (première propriété), et se coupent au milieu M de CT (deuxième propriété). — Donc le lieu de M est le cercle décrit sur DD′ comme diamètre, D étant le milieu de CB et D′ le milieu de CB′.

III. — Le sommet de l'une des paraboles est le milieu I de EH; soit DB $= a$, DB′ $= a'$, DI $= \rho$, $\widehat{B'DI} = \omega$.

On a :

$$DI = DH + \frac{HE}{2}; \quad DH = a' \cos \omega; \quad HE = H\,T \operatorname{tg}\omega,$$

car

$$\omega = \widehat{HTE},$$
$$HT = a \sin \omega.$$

L'équation du lieu est donc

$$\rho = a' \cos \omega + a \sin \omega \operatorname{tg} \omega.$$

On trouverait de même le lieu du sommet de la seconde parabole.

IV. — Les axes des quatre paraboles relatives à deux points diamétralement opposés T et T′ forment un rectangle dont l'une des diagonales est DD′. — Considérons les deux paraboles dont les axes rectangulaires se coupent en D; leurs quatre points d'intersection sont sur un cercle (troisième propriété) et ont pour centre des moyennes distances le point D (Deuxième propriété). — La corde commune AA′ a pour milieu C; donc la corde qui joint les deux points variables d'intersection a pour milieu B; ce point B est donc le centre du cercle qui passe par les quatre points; ce cercle est fixe. Le lieu cherché est donc le système des cercles ayant pour centres, respectivement, B et B′, et passant par A et A′. X.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. KOENIGS, *professeur à la Faculté des sciences de Toulouse,* **sur la question 22.**

... La question que j'ai proposée aux lecteurs de ce journal se rattache à ma *Note sur les axes des quadriques* insérée aux *Nouvelles Annales* de 1883. Le théorème en question y est démontré comme cas particulier de propositions plus générales; mais il est susceptible d'une démonstration simple et directe.

Il s'agit donc de prouver que *si l'on mène les six normales à une quadrique aux points où elle est percée par une cubique gauche passant par son centre et ayant ses asymptotes parallèles aux axes principaux de la quadrique, ces six normales sont sur une même surface du second degré.*

Je rapporte à ses axes principaux la quadrique, dont l'équation sera

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0. \qquad (1)$$

Je laisse aux lecteurs le soin de démontrer ce fait bien connu, que les coordonnées d'un point de l'une *quelconque des cubiques considérées* peuvent être exprimées à l'aide d'un paramètre t par les formules :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A\alpha}{A_1 - t}, \\ y &= \frac{B\beta}{B_1 - t}, \\ z &= \frac{C\gamma}{C_1 - t}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

où $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, A_1, B_1, C_1 sont des constantes quelconques. J'ai mis A, B, C en évidence aux numérateurs, en vue d'une légère simplification ultérieure des formules.

Les paramètres des points où la cubique perce la quadrique sont donnés par l'équation du sixième degré

$$\frac{A\alpha^2}{(t - A_1)^2} + \frac{B\beta^2}{(t - B_1)^2} + \frac{C\gamma^2}{(t - C_1)^2} - 1 = 0, \qquad (3)$$

obtenue en remplaçant dans l'équation (1) x, y, z par leurs valeurs (2). Il y a donc six points de rencontre; soit (x_0, y_0, z_0) celui qui répond à $t = t_0$, où t_0 est racine de l'équation (3). La normale en ce point à la quadrique peut être représentée à l'aide des équations :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A - \rho}{A} x_0 \\ y &= \frac{B - \rho}{B} y_0 \\ z &= \frac{C - \rho}{C} z_0 \end{aligned}\right\}$$

ou à l'aide des équations (2), où l'on fait $t = t_0$ et par suite $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \frac{A - \rho}{A_1 - t_0} \\ y &= \beta \frac{B - \rho}{B_1 - t_0} \\ z &= \gamma \frac{C - \rho}{C_1 - t_0} \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

A chaque valeur de ρ répond un point (x, y, z) sur la normale au point (x_0, y_0, z_0).

Or, envisageons les équations :

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \frac{A - \rho}{A_1 - \sigma} \\ y &= \beta \frac{B - \rho}{B_1 - \sigma} \\ z &= \gamma \frac{C - \rho}{C_1 - \sigma} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

qui définissent les coordonnées (x, y, z), d'un point de l'espace en fonction des *deux* paramètres ρ et σ. L'élimination de ρ et σ entre ces équations conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & A_1 x - A\alpha \\ y & \beta & B_1 y - B\beta \\ z & \gamma & C_1 z - C\gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

ce qui prouve que les points dont les coordonnées sont de

la forme (5) appartiennent à une surface du second degré. Mais on passe des équations (5) aux équations (4) en prenant pour σ la valeur t_0 de l'*une quelconque* des racines de l'équation (3). Il est donc prouvé que la surface (6) contient les six normales à la quadrique aux points où elle est percée par la cubique considérée.

En faisant $\rho = o$ dans les équations (5), elles coïncident avec les équations (2). La surface (6) contient donc la cubique considérée. Résultat évident encore si l'on observe que la surface (6), ayant déjà les six pieds des normales en commun avec la courbe, a encore en commun avec elle les quatre sommets du tétraèdre principal.

Pour que la surface (6) se réduise à un cône, il faut et il suffit que les six normales concourent en un même point.

On peut alors supposer

$$A_1 = A, \quad B_1 = B, \quad C_1 = C,$$

et les équations (5) deviennent

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha\frac{A-\rho}{A-\sigma} \\ y &= \beta\frac{B-\rho}{B-\sigma} \\ z &= \gamma\frac{C-\rho}{C-\sigma} \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

A toute valeur de σ répond une droite représentée par les équations (5), ρ demeurant variable. Cette droite, dans le cas des équations (5'), passe constamment, et *quel que soit* σ, par le point (α, β, γ), comme on le constate en faisant $\rho = \sigma$. Donc, le sommet du cône a pour coordonnées

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma.$$

Il est aisé de donner de la surface (6) une définition géométrique.

La cubique (2) ne change pas si A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont multipliés par une même constante K; il suffit de prendre Kt pour paramètre variable au lieu de t. Or, l'équation (6) ne change pas non plus, tandis que l'équation (1), au lieu de représenter la quadrique primitive, représente une quadrique homothétique; on peut donc énoncer ce théorème :

Envisageons des quadriques homothétiques et concentriques, et

les points où elles sont percées par une cubique gauche fixe circonscrite à leur tétraèdre principal commun; les normales à ces quadriques en ces points de rencontre engendrent une surface du second degré.

Le cas particulier où la surface (6) est un cône a été étudié par Chasles, qui a démontré que si l'on a une série de surfaces du second ordre homothétiques et concentriques, les normales abaissées d'un point de l'espace sur ces surfaces forment un cône du second ordre, et que leurs pieds sont sur une cubique gauche (*).

La généralisation que je présente ici est trop naturelle pour qu'elle n'ait pas déjà été trouvée par quelque géomètre; malgré cela, je ne me souviens pas de l'avoir jamais vue explicitement énoncée....

QUESTIONS D'EXAMENS

2*. — *Étant donnés deux segments* AB, CD, *trouver le lieu des points d'où ils sont vus sous des angles égaux* (ou supplémentaires).

Cette question donne lieu à des calculs assez longs si on la traite par la méthode naturelle, c'est-à-dire par celle qui n'est que la traduction immédiate de l'énoncé proposé.

On peut prendre une voie plus courte en considérant les cercles circonscrits aux triangles AIB, CID et en observant que les distances des centres de ces cercles aux droites AB et CD ont un rapport constant.

On peut aussi obtenir immédiatement l'équation du lieu cherché en raisonnant comme il suit. Soient décrits les cercles sur AB et CD comme diamètres; on a

$$\frac{CD \cdot IH}{AB \cdot IK} = \frac{IC \cdot ID}{IA \cdot IB}; \qquad (1)$$

d'ailleurs les triangles rectangles semblables ARI, ISD donnent

$$\frac{IA}{IR} = \frac{ID}{IS}. \qquad (2)$$

(*) Rapport sur les progrès de la géométrie, p. 113.

Des égalités (1) et (2), on déduit

$$\frac{CD \cdot IH}{AB \cdot IK} = \frac{IC \cdot IS}{IB \cdot IR}.$$

Mais les produits

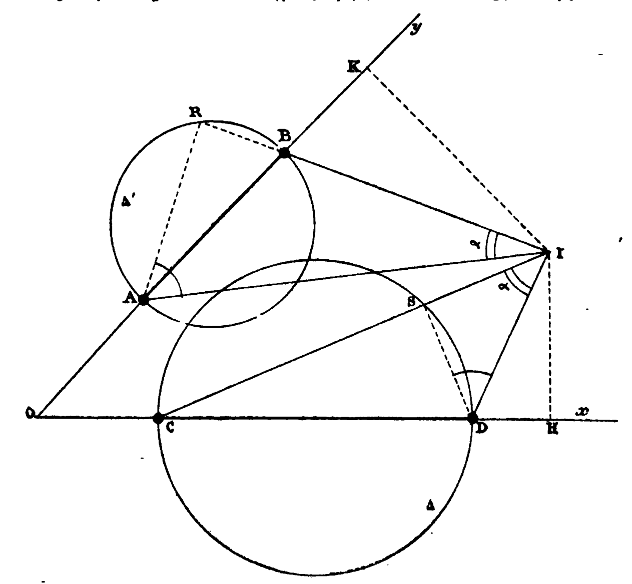
$$IC \cdot IS, \quad IB \cdot IR,$$

représentant, respectivement, la puissance du point I par rapport aux cercles Δ, Δ' ; en posant

$$OC = \alpha, \ OD = \alpha'; \quad OA = \beta, \ OB = \beta',$$

les équations des cercles Δ et Δ' sont :

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta - (\alpha + \alpha')(x + y\cos\theta) + \alpha\alpha' = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta - (\beta + \beta')(x\cos\theta + y) + \beta\beta' = 0.$$



Finalement, l'équation du lieu est

$$\frac{(\alpha'-\alpha)y}{(\beta'-\beta)x} = \frac{x^2+y^2+2xy\cos\theta-(\alpha+\alpha')(x+y\cos\theta)+\alpha\alpha'}{x^2+y^2+2xy\cos\theta-(\beta+\beta')(x\cos\theta+y)+\beta\beta'}. \quad (A)$$

C'est une cubique circulaire.

Dans le cas où les angles sont *égaux*, les puissances du point I par rapport aux cercles Δ et Δ' sont égales et de *même signe*, parce que le point I ne peut, dans cette hypothèse, être qu'extérieur aux deux cercles, ou intérieur à l'un et à l'autre.

Au contraire, si les angles considérés sont *supplémentaires*, le point correspondant est extérieur à l'un des cercles et intérieur à l'autre. D'après cette remarque, on voit qu'il faut donner au premier membre de l'équation (A), successivement, le signe + ou le signe —, suivant que les coordonnées du point considéré sont de même signe que les puissances de ce point, ou de signes contraires. Enfin, le lieu complet se compose de deux cubiques circulaires et les équations de ces courbes s'obtiennent en affectant le premier membre de (A) du signe +, puis du signe —.

Ce théorème est dû à Steiner (*) qui a fait observer, comme le prouve visiblement l'équation A, que ces deux cubiques, outre les ombilics du plan, possèdent *sept* autres points communs, savoir : 1° les quatre points donnés A, B, C, D ; 2° le point de concours O des droites AB, CD ; 3° les points communs aux deux cercles Δ, Δ' décrits sur CD et sur AB comme diamètres.

De nombreux cas particuliers découlent, comme l'a fait d'ailleurs remarquer Steiner, du cas général que nous venons d'examiner. Si les segments AB et CD sont placés sur la même ligne droite, les cubiques de Steiner dégénèrent en deux cercles, abstraction faite de cette droite. (V. *loc cit.*) Un autre cas particulier intéressant (**) est celui où l'on suppose que les segments AB et CD ont une extrémité commune. Dans ce cas la cubique possède un nœud à l'origine O et elle admet pour tangentes en ce point les bissectrices des directions données; c'est une strophoïde oblique.

En effet, en supposant $\alpha = \beta = 0$, dans l'équation (A), celle-ci devient

$$\left(\frac{y}{\beta} - \frac{x}{\alpha'}\right)(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta) = y^2 - x^2.$$

Enfin, on peut observer que cette génération des cubiques circulaires, proposée par Steiner et qui permet de construire

(*) Voyez *Journal de Mathématiques élémentaires* 1886, p. 16.

(**) Voir sur ce sujet *Journal für die reine und andgewandte Mathematik* 1885, p. 108 (Bemerkung an lässlich des Aufsatzes von Hern O. HERMES über eine gewisse Curve dritten Grades; von P. A. Schoute, professeur à l'Université de Groningue).

ces courbes par points, au moyen de deux segments capables du même angle, est susceptible d'être généralisée et l'on peut dire :

Étant donnés deux cercles γ, γ' et deux droites δ, δ'; le lieu d'un point I *tel que les distances de ce point aux droites données soient dans un rapport* K *avec les puissances de ce même point aux cercles proposés, est une cubique circulaire.*

CHOIX DE QUESTIONS ORALES

POSÉES AU CONCOURS POUR L'ÉCOLE DE SAINT-ÉTIENNE EN 1885

(*Suite et fin*, voir p. 8.)

— Construire $\rho = \frac{-p}{1 + 2\cos\omega}$.

— Dérivée de $m^{ième}$ de $\frac{x}{x-1}$.

— Equation générale des hyperboles équilatères ayant un foyer donné.

— Limite de $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ pour x tendant vers zéro.

— Limite de $\cos x^{\frac{1}{\sin x}}$ quand x tend vers zéro.

— Construire $x^2 + 4y^2 - 4y + x = 0$; sommet et paramètre de cette courbe.

— Dérivée de $y = \mathrm{L}\ \mathrm{tg}\ \mathrm{arc}\cos x^x$.

— Equation générale des coniques bi-tangentes à une conique aux points où elle est coupée par une droite.

— Construire $xy^2 + x^2 - 1 = 0$.

— Dérivée de y définie par l'équation

$$y^x - xy + \mathrm{arc\ tg}\ \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

— Lieu des sommets d'une parabole dont on donne la directrice et un point.

— Construire $\rho = \frac{\mathrm{tg}\ 2\omega}{3 - 5\sin\omega}$.

— Dérivée de $y = \mathrm{arc\ tg} x^x$.

— On a deux droites AC et AB qui sont les asymptotes d'une hyperbole, passant par deux points M et N fixes. Lieu du point A lorsque l'hyperbole se déplace dans le plan en passant toujours par les points M'N.

— On donne une directrice d'une hyperbole équilatère, un point de la courbe et le point de rencontre de la directrice avec une des asymptotes. — Lieu des sommets des hyperboles équilatères.

— Dérivée de $y = \sin \frac{1}{x^2}$.

— On donne une ellipse, deux cordes rectangulaires MA.MB. On mène la normale MP en M à l'ellipse. — Lieu du point P quand M se déplace sur l'ellipse. — Démontrer que si M est fixe, P est fixe, lorsque l'angle droit tourne autour de M.

— Trouver les axes en direction et en longueur dans la courbe.

$$x^2 - y^2 + 2xy - 1 = 0.$$

— Si A est un polynome du 3ᵉ degré; et si ce polynome est cube parfait, démontrer que $AA'' - \frac{2}{3}A' = 0$.

— Dérivée de $L(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)$.

— Démontrer que $\cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}}$, au moyen des développements en série.

— Construire $\rho = \dfrac{\sin\omega}{1 - 2\cos\omega}$.

— Lieu des foyers des ellipses dont on connaît le sommet et les extrémités des diamètres conjugués égaux.

— Lieu des sommets des paraboles dont on donne un point et le pied de la directrice sur l'axe.

— Foyer de la conique $x^2 - y^2 + 2x - y = 0$.

— Construire $y = x^3$.

— Etudier la fonction $\sin(xy) - x = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure, à l'usage des candidats aux Ecoles Polytechnique et Normale et à l'agrégation, par J. Kœhler, ancien répétiteur à l'Ecole Polytechnique, ancien directeur des études à l'Ecole préparatoire de Sainte-Barbe (Questions et solutions). Première partie; Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins, 1886.

Le livre de M. Kœhler comble une lacune dans le champ des ouvrages qu visent la préparation à l'Ecole Polytechnique, à l'Ecole Normale et à l'Agrégation. On sait toute l'importance qui est attribuée, et fort justement à notre sens, à la composition mathématique dans les examens auxquels nous venons de faire allusion; mais le cours de Mathématiques spéciales est tellement étendu qu'il n'est pas toujours possible au professeur chargé de ce cours de s'attarder, autant qu'il le voudrait, dans l'exposition des exercices si multipliés de la Géométrie analytique. Le livre de M. Kœhler, dont la première partie vient de paraître, est donc appelé à rendre aux candidats un bien réel service en leur montrant, sur des exemples très variés, l'élégance et la fécondité des méthodes qui conduisent à la recherche des lieux ou à la démonstration des théorèmes de la géométrie supérieure.

En parcourant cet intéressant volume nous avons remarqué et nous signalons à nos lecteurs :

1° Divers problèmes relatifs aux triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre (chap. I, n° 1 ... 5; chap. III, n° 22, p. 76 à 87). Ces questions sont traitées par des méthodes élémentaires sans faire intervenir le covariant F de Salmon ou les invariants Θ, Θ′. C'est à cette théorie générale des polygones inscrits et circonscrits simultanément à deux coniques, théorie

dont l'idée remonte, croyons-nous, à Poncelet, que se rattache la question donnée aux candidats à l'Ecole Normale au dernier concours (*).

2° La théorie des polygones circonscrits à une conique et dont les sommets se meuvent sur d'autres coniques (chap. VIII, appendice, p. 270).

Le problème I de cet appendice a été traité par M. Darboux en faisant intervenir les fonctions elliptiques. Voici l'énoncé de ce problème (p. 275):

Lorsque trois coniques U, (f), (f') *sont inscrites dans le même quadrilatère, si deux sommets d'un triangle circonscrit à l'une d'elles glissent sur les deux autres, le lieu du sommet libre se compose de deux coniques inscrites dans le même quadrilatère que les trois premières.*

M. Darboux donne l'équation du lieu; mais la différence de deux intégrales elliptiques s'introduit dans l'équation; il est vrai qu'il ressort de sa démonstration que cette différence est nécesssairement algébrique. M Kœhler donne (éq. I', p. 277) le moyen de former explicitement les équations des deux coniques qui constituent par leur ensemble le lieu cherché.

Nous signalerons encore dans ce même appendice le problème 5 (p. 584):

Deux sommets d'un triangle se meuvent sur une conique F; *deux côtés touchent une conique* U, *le troisième enveloppe une conique* F' *du faisceau* U,F; *trouver le lieu du sommet libre.*

Ce problème paraît avoir été traité pour la première fois par Salmon dans le *Quaterly Journal;* la solution de Salmon, extrêmement laborieuse d'ailleurs, se trouve résumée dans l'édition française du traité des coniques de cet auteur.

La solution de M. Kœhler est sensiblement plus simple. C'est à la suite (pp. 288 et 289) qu'on trouve une démonstration, que nous croyons nouvelle, du célèbre théorème de Poncelet.

Si les n *côtés d'un polygone touchent une conique fixe* U *et si* n — 1 *sommets se meuvent sur une conique* F, *le lieu du sommet libre est une conique inscrite dans le même quadrilatère que les deux premières.*

Nous signalerons encore, comme nous ayant plus particulièrement frappé:

1° L'*étude analytique du cercle de Brocard.*

Cette étude est faite au moyen des coordonnées trilinéaires, qui sont les coordonnées naturelles de cette question. Il y a d'ailleurs longtemps, relativement du moins, que cette étude analytique a été entreprise par MM. Neuberg, Lemoine, etc., sans compter M. Brocard lui-même. A notre avis (et M. Neuberg que nous venons de citer, partage, croyons-nous, cette opinion), l'étude analytique en question se fait un peu plus simplement en adoptant les coordonnées barycentriques. Mais, au fond, la différence des deux méthodes est peu sensible.

2° Étude d'un système de deux coniques telles que la conique covariante F se réduise à deux droites (p. 222; n° 49);

3° Étude de trois coniques formant un système harmonique;

4° Calcul du rayon de courbure en coordonnées trilinéaires, équation du cercle de courbure (p. 382).

De cette dernière formule, M. Kœhler déduit l'expression du rayon de courbure de l'hypocycloïde à trois rebroussements et retrouve le théorème que nous avons donné autrefois (**) :

Le rayon de courbure en un point quelconque de l'hypocycloïde à trois rebroussements est égal à huit fois la distance du centre du cercle circonscrit à la tangente en ce point.

(*) Voyez *Journal*, 1885, p. 180.

(**) *Journal de mathématiques spéciales*, 1884, p. 176.

Ces citations diverses suffisent à donner une idée de l'importance du livre de M. Kœhler, du souffle élevé qui l'anime, de l'abondance et de la variété des matériaux qui le constituent. On se plaint beaucoup, il faut avoir le courage de le reconnaître, de la faiblesse de plus en plus marquée, dans les divers examens et au concours général, des compositions de mathématiques, principalement à Paris. On ne sait plus faire le problème; et nos élèves lisent de moins en moins, absorbés qu'ils sont par un cours qui est vraiment bien lourd, surtout pour les élèves de première année. Il faut dire aussi qu'ils travaillent trop les questions d'examens, et ils poussent aujourd'hui *la préparation* jusqu'à la connaissance des détails les plus minutieux. Ce n'est pas là, assurément, la base d'une bonne instruction et nous ne pouvons croire que ces procédés artificiels puissent faire d'un candidat tout à fait médiocre un élève de nos grandes écoles.

Les candidats savent pourtant bien que cette préparation ne trompe personne et que ceux notamment qui sont appelés à les juger ont vite dévisagé ces médiocrités bien dressées, qui ne représentent qu'une surface facile à percer. On ne leur demande pas, dans les examens auxquels ils se destinent, de répéter, les uns après les autres, une définition plus ou moins controversée dans sa forme, comme celle des irrationnelles ou des imaginaires, définition qui peut cesser de plaire d'une année à la suivante, ou quand on passe d'un juge à un autre. Non, les examinateurs ont souci de trouver en eux des esprits précis et droits ; sans doute connaissant bien la valeur des termes qu'ils emploient, mais surtout largement ouverts aux raisonnements rigoureux et aux méthodes générales des mathématiques. C'est qu'il est, en effet, de toute justice que les portes de nos grandes écoles ne se ferment pas sur ces intelligences d'élite, leur recrutement intéressant le bon fonctionnement des services publics. Que les élèves cherchent donc à voir un peu au delà du cours; qu'ils lisent des ouvrages comme celui que nous venons d'analyser, et nous persistons à penser, malgré quelques exemples qu'on pourrait nous rappeler et qui donnent au système que nous préconisons ici un tort apparent, que ces candidats trouveront, en nous écoutant, la voie la plus courte et la plus sûre pour atteindre le but qu'ils ont en vue. G. L.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Questions de mathématiques supérieures d'où sera tiré le sujet de l'une des compositions d'admissibilité.

Calcul différentiel et calcul intégral.

Propriétés des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes d'une variable réelle ou imaginaire. Cercle de convergence.

Développement d'une fonction d'une seule variable z, réelle ou imaginaire en série ordonnée suivant les puissances entières de z. Séries de Taylor et de Mac Laurin. Théorème de Laurent sur les développements en série.

Définition et propriétés des fonctions z^m, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arc\,tg} z$.

Propriétés fondamentales de l'intégrale Eulérienne de seconde espèce.

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx.$$

Détermination de l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et des intégrales définies qui s'en déduisent immédiatement.

Montrer que l'intégrale Eulérienne $\Gamma(a)$ est la limite du produit

$$\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right)}$$

pour n infini. Conséquences de cette propriété.

Evaluation approchée de $\log \Gamma(a)$ pour de très grandes valeurs de la variable a. Formule de Stirling.

Equation différentielle du premier ordre entre deux variables : intégrales générales, intégrales particulières, intégrales singulières. Démonstration de l'existence de l'intégrale générale.

Intégration de l'équation dans les cas les plus simples.

Mécanique.

Etude, au point de vue cinématique, du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Vitesse des différents points de ce corps ; axe instantané de rotation.

Représentation géométrique d'un mouvement fini du solide considéré. Comparer les accélérations de ces divers points pour un instant donné.

Mouvements d'un corps solide sur lequel agissent deux forces données et qui est assujetti à tourner autour d'un point fixe. Equation d'Euler. Etude du cas où le corps est un solide de révolution homogène dont l'axe passe par le point fixe ; examiner en particulier les divers mouvements que ce solide peut prendre lorsqu'il est uniquement sollicité par la pesanteur.

Etudier, comme second cas particulier, celui où le solide, de forme quelconque, n'est sollicité par aucune force extérieure. Représentation du mouvement ; théorèmes de Poinsot ; polhodie et herpolhodie.

Mouvement d'un solide complètement libre et sollicité par des forces données.

Equations générales auxquelles Lagrange a ramené la résolution d'un problème quelconque.

(A suivre.)

QUESTION 108

Solution, par M. J.-T., élève de Mathématiques spéciales.

On donne un triangle rectangle isoscèle AOB, *et on lui circonscrit un cercle et une hyperbole équilatère variable. Ces deux courbes ont alors en commun trois points fixes et un point variable. Par ce dernier, on mène la tangente au cercle. Lieu du point d'intersection de cette tangente avec les parallèles menées par le sommet de l'angle droit aux asymptotes de l'hyperbole correspondante.*

Je prends pour axe des x une parallèle à l'hypoténuse menée par le sommet de l'angle droit et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite. Soit a la distance de l'origine

à l'hypoténuse, l'équation du cercle circonscrit du triangle est

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

L'équation d'une hyperbole équilatère passant par les points A, B, O est

$$x^2 + y^2 - 2ay - 2(y - a)(y - mx) = 0.$$

Elle coupe le cercle en un point qui est sur la droite $y - mx = 0$ et qui a pour coordonnées $\frac{2am}{1 + m^2}$ et $\frac{2am^2}{1 + m^2}$.

La tangente au cercle en ce point a pour équation

$$x \frac{2am}{1 + m^2} + y\left(\frac{2am^2}{1 + m^2} - a\right) - a \frac{2am^2}{1 + m^2} = 0$$

ou

$$m^2(y - 2a) + 2mx - y = 0. \qquad (1)$$

L'équation des directions asymptotiques de l'hyperbole est

$$x^2 - y^2 + 2mxy = 0. \qquad (2)$$

Il n'y a plus qu'à éliminer m entre (1) et (2). Tirant m de la seconde et portant dans la première, on a l'équation du lieu

$$y(y^2 - 3x^2)(x^2 + y^2) - 2a(y^2 - x^2)^2 = 0.$$

Pour construire la courbe représentée par cette équation, je pose $y = tx$ et j'en tire

$$x = \frac{2a}{1 + t^2} - \frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 - 3)}, \quad y = \frac{2a}{1 + t^2}\, \frac{(t^2 - 1)^2}{t^2 - 3}.$$

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des y. Les valeurs d'x et d'y deviennent infinies pour

$$t = \pm \sqrt{3}.$$

La différence

$$y - x\sqrt{3} = \frac{2a(t^2 - 1)^2}{(1 + t^2)(t^2 - 3)}, \frac{t - \sqrt{3}}{t} = \frac{2a(t^2 - 1)^2}{t(1 + t^2)(t + \sqrt{3})}$$

devient $\frac{a}{3}$ pour $t = \sqrt{3}$ et la somme

$$y\, x + \sqrt{3} = \frac{t(1 + t^2)(t - \sqrt{3})}{2a(t^2 - 1)^2}$$

devient $\frac{a}{3}$ pour $t = -\sqrt{3}$.

La courbe présente donc deux asymptotes réelles :

$$y = x\sqrt{3} + \frac{a}{3},$$

$$y = -x\sqrt{3} + \frac{a}{3}.$$

Il y a en outre une asymptote parallèle à l'axe des x qui est donnée pour $t = 0$

$$y = -\frac{2a}{3}.$$

La courbe présente un point quadruple à l'origine, les tangentes étant les bissectrices des angles des axes. Elle coupe l'axe des y au point d'ordonnée $2a$ et la tangente en ce point est une parallèle à l'axe des x.

Nota. — La même question a été résolue par M. Marchis, à Rouen.

QUESTIONS PROPOSÉES

189. — Construire les courbes représentées par l'équation

$$y = \frac{\log x + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right)}{\log x + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)},$$

où les signes se correspondent. *(S. Realis.)*

190. — On considère deux points fixes A, B; un angle droit *uov* pivote autour d'un point fixe O et l'on considère les deux paraboles P et Q qui, passant par A et B, ont pour axes, respectivement, *ou* et *ov*.

Trouver le lieu décrit par les deux autres points qui sont communs à P et à Q.

On examinera le cas particulier où le point O est situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB. *(X.)*

Erratum. — P. 12, lig. 15, et p. 13, lig. 9 (en remontant) au lieu de cercle de courbure γ', il faut lire *demi*-cercle de courbure; cette erreur m'a été signalée par M. Maurice d'Ocagne. Je reviendrai d'ailleurs, dans le prochain numéro, sur les constructions en question qui sont, comme l'a remarqué M. d'Ocagne, susceptibles d'une notable simplification.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2326-6.

LA PREMIÈRE LEÇON DE CALCUL INTÉGRAL

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 25.)

Théorème III. — *La limite de* U *est une fonction de* X *dont la dérivée est identique à* f (X).

Après avoir montré que la fonction U a une limite, nous pouvons lui donner un nom et la représenter par un symbole.

Nous dirons donc que U est l'*intégrale définie* de $f(X)$, dans les limites (x_0, X) et nous ferons la convention de représenter cette limite par la notation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

Nous écrirons donc

$$\lim U = \int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

Dans cette formule U a la signification que nous lui avons donnée plus haut, dx désigne l'un quelconque des intervalles

$$x_1 - x_0, \qquad x_2 - x_1, \;\ldots\; X - x_p.$$

On peut d'ailleurs supposer que ces accroissements sont égaux, puisque, comme nous l'avons prouvé, la limite est indépendante de la loi d'insertion des moyens, pourvu que chaque différence tende vers zéro. Il faut donc supposer simplement que *dx est une quantité variable tendant vers zéro.*

L'expression

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx,$$

par sa définition même, est nulle quand $X = x_0$; de plus,

c'est une fonction de X. On peut donc la représenter par

$$F(X) - F(x_0)$$

en posant

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = F(X) - F(x_0). \qquad (\alpha)$$

Nous voulons démontrer que nous avons

$$F'(X) = f(X).$$

L'identité (α) donne, par un changement de notation,

$$\int_{X}^{X+\Delta X} f(x)dx = F(X + \Delta X) - F(X).$$

Considérons maintenant l'intervalle

$$X, \qquad X + \Delta X,$$

et, dans cet intervalle, insérons les moyens

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_i.$$

D'après la définition même, donnée tout à l'heure, de l'intégrale définie, nous pouvons écrire

$$\int_{X}^{X+\Delta X} f(x)\, dx = F(X + \Delta X) - F(X)$$

$$= \lim \left\{ (\xi_1 - X) f(X) + \dots + (X + \Delta X - \xi_i) f(\xi_i) \right\}.$$

Soit M la plus grande des quantités

$$f(X), \quad f(\xi_1) \dots f(\xi_i) ; \qquad (6)$$

nous avons donc

$$F(X + \Delta X) - F(X) < M(\xi_1 - X + \dots + X + \Delta X - \xi_i),$$

ou, en tenant compte des simplifications,

$$F(X + \Delta X) - F(X) < M \,.\, \Delta X. \qquad (7)$$

De même, soit M' la plus petite des quantités (6); nous avons alors

$$F(X + \Delta X) - F(X) > M' \,.\, \Delta X. \qquad (8)$$

Des inégalités (7) et (8) nous déduisons

$$M' < \frac{F(X + \Delta X) - F(X)}{\Delta X} < M.$$

Si nous passons à la limite, ΔX tendant vers zéro, toutes les quantités (6) ont pour limite commune $f(X)$; concluons donc que

$$f(X) = \lim \frac{F(X + \Delta X) - F(X)}{\Delta X} = F'(X).$$

Après l'exposé qui précède, les difficultés auxquelles nous avons fait allusion au début de cette note disparaissent; l'intégrale définie se trouve rigoureusement établie et l'on peut, en se plaçant au point de vue du problème des quadratures, donner l'interprétation géométrique qu'elle comporte.

SUR LE POINT DE STEINER

Par M. **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

(*Suite*, voir p. 28.)

6. — On peut rattacher au point de Steiner deux autres points remarquables du plan $A_1A_2A_3$; ce sont ceux qui, avec R, sont les sommets d'un triangle inscrit à l'ellipse ε et ayant pour centre le centre de gravité, le point G.

A cet effet, considérons, d'abord, un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$. Sur la circonférence circonscrite, et dans le même sens, prenons trois arcs égaux A_1E_1, A_2E_2, A_3E_3. Il est facile de voir que les faisceaux $E_1(A_1A_2A_3)$, $E_2(A_3A_1A_2)$, $E_3(A_2A_3A_1)$ ont leurs rayons homologues parallèles.

En généralisant la réciproque de cette propriété au moyen d'une projection cylindrique, on trouve le théorème suivant :

Étant donné un triangle quelconque $A_1A_2A_3$, *le lieu d'un point* E_1 *tel que les parallèles aux droites* E_1A_1, E_1A_2, E_1A_3 *menées respectivement par* A_3, A_1, A_2 *concourent en un même point* E_2, *est l'ellipse* ε *circonscrite à* $A_1A_2A_3$ *et ayant pour centre le centre de gravité de* $A_1A_2A_3$. *Les parallèles à* E_1A_1, E_2A_2, E_3A_3 *menées respectivement par* A_2, A_3, A_1 *concourent également en un même point* E_3 *de l'ellipse* ε. *Les triangles* $E_1E_2E_3$, $A_1A_2A_3$ *ont même centre de gravité* (*).

Le point de Steiner étant situé sur l'ellipse ε, on a le cas

(*) Une projection conique conduit à cette nouvelle généralisation :

Étant donnés un triangle quelconque $A_1A_2A_3$ *et une conique circonscrite* U *dont le pôle et l'axe d'homologie par rapport à* $A_1A_2A_3$ *sont désignés par* L *et* l, *les droites joignant* A_1, A_2, A_3 *à un point quelconque* E_1 *de* U *rencontrent* l *en trois points* α, β, γ : *les droites* $A_2\alpha$, $A_3\beta$, $A_1\gamma$, *concourent en un même point* E_3 *de* U, *et les droites* $A_3\alpha$, $A_1\beta$, $A_2\gamma$ *en un point* E_2 *de* U ; *le pôle et l'axe d'homologie de* U *par rapport au triangle* $E_1E_2E_3$ *sont encore* L *et* l.

particulier que voici : *Si par les sommets* A_2, A_3, A_1 *d'un triangle on mène des parallèles aux droites* A_1R, A_2R, A_3R *(ou à* B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2*), ces parallèles concourent en un même point* ρ'; *de même, les parallèles menées par* A_3, A_1, A_2 *aux lignes* A_1R, A_2R, A_3R *concourent en un point* ρ. *Le triangle* $R\rho\rho'$ *a même centre de gravité que* $A_1A_2A_3$.

La droite $\rho\rho'$ étant parallèle à la tangente menée par R à l'ellipse, est perpendiculaire à la droite qui joint R au point symétrique de H par rapport à G.

Les directions des côtés des triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ faisant des angles égaux avec un axe de ε, on voit sans peine que *les parallèles aux côtés* a_1, a_2, a_3 *du triangle* $A_1A_2A_3$, *menées respectivement par* B_2, B_3, B_1 *ou par* B_3, B_1, B_2 *concourent en deux points* x', x : *les triangles* $B_1B_2B_3$, Kxx' *ont même centre de gravité et sont inscrits à une même ellipse.*

En faisant intervenir le point N, on peut donner, des résultats précédents, cet autre énoncé : *Il existe dans le plan de tout triangle* $A_1A_2A_3$ *un point* N *tel que les perpendiculaires abaissées* A_1, A_2. A_3 *ou de* A_3, A_1, A_2 *ou de* A_2, A_3, A_1 *concourent respectivement en trois points* R, ρ, ρ'. *Les points* N *et* R *sont situés sur le cercle* $A_1A_2A_3$, *et les triangles* $A_1A_2A_3$, $R\rho\rho'$ *ont même centre de gravité.*

Les angles des faisceaux $R(A_1A_2A_3)$, $\rho(A_3A_1A_2)$, $\rho'(A_1A_2A_3)$ étant égaux aux angles du triangle $A_1A_2A_3$, on peut déterminer les points ρ, ρ' par une construction offrant la plus grande analogie avec celle des points de Brocard. On sait que ceux-ci sont à l'intersection des arcs des segments capables des angles $\pi - A_1$, $\pi - A_2$, $\pi - A_3$ construits sur a_2, a_3, a_1 ou sur a_3, a_1, a_2. Les symétriques de ces circonférences par rapport aux côtés correspondants de $A_1A_2A_3$ se coupent respectivement en ρ et ρ'.

Les coordonnées barycentriques des points ρ', ρ sont :

$$\frac{1}{a_3^2 - a_1^2}, \quad \frac{1}{a_1^2 - a_2^2}, \quad \frac{1}{a_2^1 - a_3^2};$$

$$\frac{1}{a_1^2 - a_2^2}, \quad \frac{1}{a_2^2 - a_3^2}, \quad \frac{1}{a_3^2 - a_1^2}.$$

(A suivre.)

SUR LES COURBES PARALLÈLES

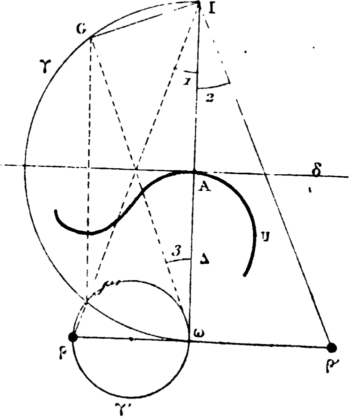
ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 11.)

Les constructions (*) indiquées dans les deux paragraphes précédents sont susceptibles d'une notable simplification qui m'a été signalée par M. d'Ocagne et que je vais faire connaître.

42. — Prenons d'abord les *anti-développées*. Soient ω le centre de courbure de la courbe proposée U, ρ celui de la développée W. Sur $\omega\rho$ comme diamètre, décrivons le cercle γ'; celui-ci coupe le cercle γ décrit sur ωI comme diamètre en un point f'; la parallèle menée à Iω par f' coupe γ en un point G qui appartient à la tangente en I à l'anti-développée.



De cette construction, indiquée par nous, on peut déduire que *la normale en I à l'anti-développée passe par le point ρ' symétrique de ρ par rapport à ω.*

En effet, les trois points ρ, f', I sont en ligne droite; les angles $\widehat{1}$ et $\widehat{2}$ sont égaux, puisque $\omega\rho' = \omega\rho$. Par suite on a $\widehat{3} = \widehat{2}$; la droite ωG étant perpendiculaire sur GI, la parallèle ρ'I est, elle aussi, perpendiculaire sur cette droite; ρ'I est donc la normale à l'anti-développée.

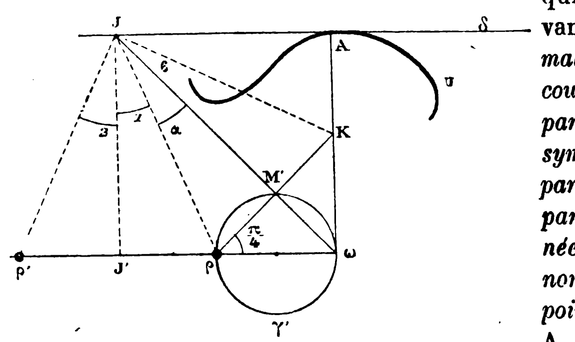
43. — Considérons maintenant les courbes ζ que l'on

(*) Je veux parler des *constructions rectifiées* conformément à l'erratum publié à la dernière page du numéro de février.

déduit, comme nous l'avons dit plus haut (§ 41), d'une courbe donnée U, en portant le rayon de courbure sur la tangente correspondante.

Soit U la courbe proposée; nous prenons sur U un point A et nous traçons la tangente δ et la normale Aω, en ce point A. Ayant pris le point ρ, centre de courbure en ω de la développée V, nous décrivons, sur $\omega\rho$ comme diamètre, un cercle γ' et nous joignons les points J et ω; cette dernière droite coupe γ' en un point M'. Nous avons démontré que la tangente en J à la courbe ζ était tangente au cercle circonscrit au triangle AM'J.

Cette construction conduit à une conséquence remarquable qui est la suivante : *la normale en* J *à la courbe* ζ *passe par le point* ρ', *symétrique de* ρ *par rapport à la parallèle, menée par* J, *à la normale à* U, *au point considéré* A.



En effet, prolongeons ρM' jusqu'à sa rencontre en K avec Aω, le quadrilatère AJM'K est inscriptible; par suite, le centre du cercle circonscrit au triangle AM'J est situé au milieu de JK. La droite JK est donc la normale à la courbe ζ, d'où l'on conclut, en observant que, $\omega K = \omega\rho$, que *en retranchant du rayon de courbure* ωA *le rayon de courbure* $\omega\rho$ *de la développée, on obtient un point* K *par lequel passe la normale à la courbe* ζ.

On voit aussi qu'en prenant, comme le propose M. d'Ocagne, $J'\rho' = \rho J'$, on a $\widehat{1} = \widehat{2}$; mais $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$; d'ailleurs le quadrilatère JJ'ρM' étant inscriptible $\widehat{1} + \widehat{\alpha} = \frac{\pi}{4}$; on a donc $\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = \frac{\pi}{2}$, d'où l'on conclut finalement $\rho' JK = \frac{\pi}{2}$. La droite Jρ' est donc la tangente à la courbe ζ.

C'est, croyons-nous, en reprenant les problèmes que nous nous sommes posé dans les paragraphes 40 et 41, et en leur appliquant une formule de Newton (*), formule dont il a d'ailleurs fait connaître plusieurs transformations qui la rendent plus pratique et plus commode (**), que M. d'Ocagne a relevé l'erreur qui nous avait fait confondre le rayon du cercle osculateur avec son diamètre, et qu'il a été conduit aux deux constructions très élégantes que nous venons d'établir différemment, en prenant pour base de nos raisonnements ce principe si fécond des transversales réciproques.

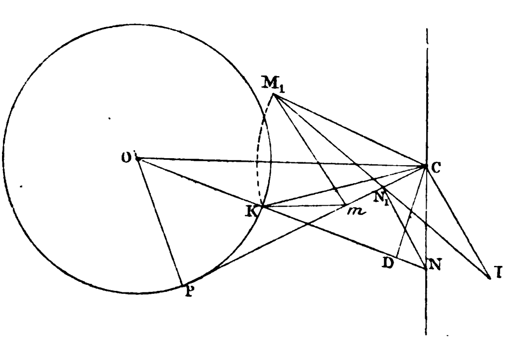
(A suivre.)

SUR LA SECTION PLANE D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION ET LE THÉORÈME DE VILLARCEAU

Par M. **Poujade**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

Quand une surface de révolution dont on connait le méridien est coupée par un plan, on sait que la section se construit par points de la manière suivante :

I. — Supposons que le plan coupe l'axe en C, prenons le plan méridien perpendiculaire au plan sécant pour plan du tableau et rabattons-y la section autour de sa trace CP. En un point m de CP se projette sur le tableau un point M de la section, situé sur le parallèle de trace MK perpendiculaire à l'axe CZ rencontrant le méridien en K. On a



(*) Voyez *Journal*, 1880, p. 433.

(**) Voyez, sur ce sujet, divers articles de M. d'Ocagne dans les *Nouvelles Annales*, dans *Mathesis* et dans ce journal même.

d'ailleurs CM = CK; donc élevant en m la perpendiculaire à CP et décrivant l'arc de cercle de C comme centre et rayon CK, il coupe cette perpendiculaire au point M_1, rabattement de M.

Application. — La méridienne est un cercle de centre O, la perpendiculaire abaissée de O sur l'axe a son pied en C et CP est tangente à cette méridienne, le plan considéré est alors bi-tangent au tore. Envisageons toujours la construction du rabattement M_1 du point M situé sur le parallèle de trace mK, l'équivalence des deux triangles OCK, OCm donne en abaissant de C sur OK la perpendiculaire CD $OK \times CD = Cm \times OP$, donc $CD = Cm$. Par suite les deux triangles CKD, CmM_1 sont égaux ainsi que leurs angles aigus en M_1 et K. Elevons en C sur CP une perpendiculaire $CI = OP$, en sens contraire de mM_1, les deux triangles ICM_1 et OCK sont égaux et $IM_1 = OC$; donc le lieu de M_1 est un cercle de centre I et rayon OC. Il y a un deuxième cercle symétrique par rapport à CP.

II. — Pour construire la tangente à la section au point M_1, observons que la normale à la surface en M se projette sur le plan sécant suivant la normale à la section. Si donc nous menons la normale à la méridienne en K, soit KN coupant l'axe en N, si nous projetons ce point sur CP en N_1, M_1N_1 est la normale à la section et M_1T_1 perpendiculaire donne la tangente.

Application. — On en pourrait déduire que dans la section du tore par un plan bitangent, la normale en un point M_1 va passer par un point fixe I.

On peut aussi obtenir cette propriété moins connue : *Un cercle situé sur le tore dans un plan bitangent coupe tous les méridiens sous le même angle.*

Remarque. — Quand un plan sécant est parallèle à l'axe il faut envisager le rabattement du parallèle mK pour connaître mM et construire M_1. La tangente se construit toujours comme ci-dessus.

SUR UN NOUVEAU (*) CERCLE REMARQUABLE
DU PLAN D'UN TRIANGLE,

Par M. G. de Longchamps.

1. Définition du cercle Δ. — Imaginons un triangle ABC et du point A comme centre, avec a pour rayon, décrivons un cercle Δ_a; il existe un cercle Δ coupant orthogonalement les trois cercles Δ_a, Δ_b, Δ_c; c'est ce cercle Δ que nous avons ici en vue.

2. Équation cartésienne de Δ. — Si nous prenons le sommet C pour origine et les côtés CB, CA pour axes des x et des y, des calculs bien simples, mais que, pour abréger, nous supprimons, conduisent à l'équation

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos C - 2cx \cos B - 2cy \cos A + c^2 = 0. \quad (1)$$

On vérifiera d'ailleurs immédiatement que la puissance des points A (o, b), B (a, o), C (o, o) est égale, respectivement à a^2, b^2, et c^2; l'équation (1) représente donc bien le cercle orthotomique aux trois cercles Δ_a Δ_b Δ_c imaginés plus haut.

3. Équation de Δ en coordonnées barycentriques. — On sait qu'en désignant par α, β, γ les coordonnées barycentriques d'un point M, situé dans le plan du triangle ABC, c'est-à-dire, en grandeur et en signe, les aires des triangles MBC, MCA, MAB, l'équation générale des cercles est

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0. \quad (A)$$

Dans ce système de coordonnées, et c'est un des motifs qui nous le font préférer à celui des coordonnées trilinéaires, les

(*) Je veux dire, bien entendu, que je le suppose nouveau, mais il est très possible qu'il ait été déjà entrevu.

On sait que la géométrie élémentaire moderne s'est enrichie de propriétés diverses et fort intéressantes par l'introduction d'éléments nouveaux dans la *Géométrie du triangle.* Tels sont notamment : le cercle de Brocard, le premier et le deuxième cercle de Lemoine, le cercle de Taylor, etc. Cette géométrie commence à être très connue et M. Vigarié, dans un prochain article, fera le résumé des principales définitions et des plus importantes propriétés qui la constituent.

paramètres u, v, w qui déterminent un cercle quelconque ont une signification géométrique immédiate et bien remarquable; ils représentent, respectivement, les puissances des sommets du triangle par rapport au cercle considéré.

On peut vérifier ceci, en prenant l'équation

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos C + \frac{x}{a}(v - w - a^2)$$
$$+ \frac{y}{b}(u - w - b^2) + w = 0,$$

laquelle représente un cercle tel que les puissances des points A B, C soient respectivement u, v, w.

En la transformant en coordonnées barycentriques au moyen des formules :

$$2\alpha = ay \sin C, \quad 2\beta = bx \sin C, \quad \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\frac{1}{2} ab \sin C} = 1,$$

on obtient l'équation (A).

Dans cette manière d'envisager les cercles qui appartiennent au plan d'un triangle, en prenant

$$u = f(a, b, c), \quad v = f(b, c, a), \quad w = f(c, a, b),$$

on obtient un cercle remarquable associé à ce triangle. Celui que nous étudions dans cette note correspond à l'hypothèse particulière

$$u = a^2, \quad v = b^2, \quad w = c^2.$$

En coordonnées barycentriques, l'équation de Δ est donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0.$$

Nous reviendrons d'ailleurs, un peu plus loin, sur cette égalité remarquable.

4. Détermination du centre de Δ. — Les coordonnées du centre vérifient les équations

$$x + y \cos C - c \cos B = 0,$$
$$x \cos C + y - c \cos A = 0.$$

La première représente une droite perpendiculaire à CB et passant par le point $(a, -b)$, c'est-à-dire par le sommet A' du triangle A'B'C' obtenu en menant par les sommets du triangle proposé des parallèles à ses côtés.

Concluons donc que *le centre de Δ est l'orthocentre de* A'B'C'; nous pouvons dire aussi que *le centre de Δ s'obtient en pre-*

nant le symétrique de l'orthocentre de ABC *par rapport au centre du cercle circonscrit à ce triangle.*

5. Calcul du rayon de Δ. — Le discriminant U de l'équation (1) est égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos C & -c\cos B \\ \cos C & 1 & -c\cos A \\ -c\cos B & -c\cos A & c^2 \end{vmatrix},$$

d'où

$$U = c^2(1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C). \quad (2)$$

D'ailleurs on a

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1, \quad (3)$$

et, par conséquent,

$$U = 4c^2 \cos A \cos B \cos C.$$

En désignant par ρ le rayon de Δ, la formule connue

$$\rho^2 \sin^2 C + U = 0$$

donne, dans le cas présent,

$$\rho^2 = -16R^2 \cos A \cos B \cos C, \quad (B)$$

formule dans laquelle R désigne le rayon du cercle circonscrit à ABC.

On sait (*) qu'en désignant par ρ' le rayon du cercle conjugué à un triangle, ρ' est donné par la formule

$$\rho'^2 = -4R^2 \cos A \cos B \cos C ;$$

on peut donc dire que *le rayon de Δ est égal au diamètre du cercle conjugué.*

On voit aussi, d'après ce résultat, que Δ, comme le cercle conjugué, est imaginaire lorsque le triangle n'a que des angles aigus; il se présente sous la forme d'un point, au moment où ABC est rectangle, ce point étant symétrique du sommet de l'angle droit par rapport au milieu de l'hypoténuse; enfin, si le triangle possède un angle obtus, le cercle Δ existe réellement.

6. Autre expression du rayon. — Les équations (2) et (3) donnent encore

$$U = 2c^2(1 - \cos^2 A - \cos B^2 - \cos^2 C),$$

ou

$$U = 2c^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2).$$

(*) Voyez Kœhler, *Exercices de Géométrie analytique*, p. 173.

On a donc

$$\rho^2 \sin^2 C = 2c^2\left(2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2}\right)$$

ou, finalement,

$$\rho^2 = 16R^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Cette forme remarquable permet de construire ρ par un tracé très simple, et sur lequel il est inutile d'insister ici, lorsque l'on a

$$a^2 + b^2 + c^2 < 8R^2,$$

inégalité qui est vérifiée, comme nous l'avons observé tout à l'heure, toutes les fois que le triangle donné possède un angle obtus.

7. Réflexions générales. — Le fait que nous venons de constater et duquel il résulte que Δ cesse d'exister pour les triangles qui n'ont que des angles aigus, entraîne une conséquence qu'il est bon d'observer avant de pénétrer plus profondément dans l'étude de Δ. Puisque Δ est un cercle imaginaire quand ABC n'a pas d'angle obtus, Δ ne saurait passer par aucun point remarquable, ni être tangent à aucune droite ou cercle remarquable du plan du triangle, si l'on suppose du moins que cet élément (point, droite ou cercle) soit ce qu'on pourrait appeler *un élément unicursal*, c'est-à-dire quelque chose qu'on obtient par une construction aboutissant à ce *seul* élément; ou, si l'on préfère la traduction analytique de notre pensée, par un tracé dépendant d'une équation du *premier degré*.

En effet, si Δ pouvait passer, par exemple, par un point ω dont l'existence serait certaine, et ne dépendrait pas de la forme du triangle, Δ serait un cercle toujours réel, ce qui n'est pas.

Ces sortes de propriétés sont donc interdites au cercle Δ; mais il n'en est plus de même de celles qui ressortent des équations du second degré et nous allons maintenant en montrer quelques-unes (*).

(A suivre.)

(*) Il est probable que cette note donnera lieu à des réflexions diverses; mais je désire, pour un motif trop naturel, qu'elles ne me soient pas communiquées avant la publication complète du présent article.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 8.)

CHAPITRE VIII (*)

LE TRACÉ DES CUBIQUES

La cissoïde de Dioclès et la duplication du cube (**).

91. Génération normale de la cissoïde. — Soient Δ et Δ′ deux droites parallèles et AB une perpendiculaire commune ; par A menons une transversale AD, puis, du point B abaissons une perpendiculaire BC et prenons enfin AI = CD (***). Le lieu décrit par le point I, quand AD tourne autour de A, est une courbe imaginée par Dioclès et qu'on nomme la cissoïde.

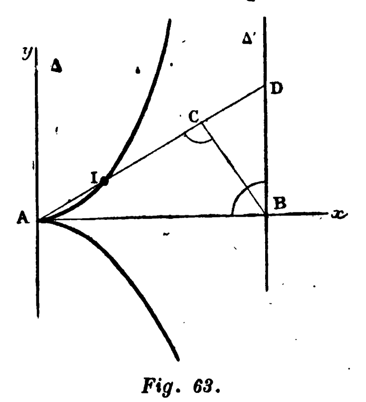


Fig. 63.

En posant
$AI = \rho$, $DAB = \omega$, $AB = d$,
on trouve immédiatement

$$\rho = \frac{d \sin^2 \omega}{\cos \omega};$$

c'est l'équation polaire de la cissoïde.

(*) Voyez les sept premiers chapitres traitant de sujets élémentaires dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

(**) Il va sans dire que le problème de la duplication du cube ne ressort nullement de la géométrie de la règle ; nous n'en parlons ici qu'incidemment à propos de la cissoïde qui doit, à ce problème fameux, sa première renommée.

(***) Il est bien entendu qu'en écrivant AI = CD, nous voulons exprimer non seulement que les segments AI et CD sont égaux, mais aussi qu'ils ont la *même direction*.

En prenant AB pour axe des x, Δ pour axe des y, l'équation précédente donne

$$y^2 = \frac{x^3}{d - x},$$

c'est, dans le système d'axes adopté, l'équation cartésienne de la cissoïde.

La génération précédente n'exige, comme on le voit, que l'usage de la règle et de l'équerre ; car (§ 26) nous savons porter un segment donné CD sur sa direction, en prenant pour origine un point quelconque A. Mais nous allons faire connaître d'autres constructions, point par point, de la cissoïde, qui se prêtent mieux que la précédente à l'emploi de la règle et de l'équerre.

92. Générations diverses de la cissoïde. — 1° Prenons encore les deux parallèles Δ, Δ', puis effectuons avec elles

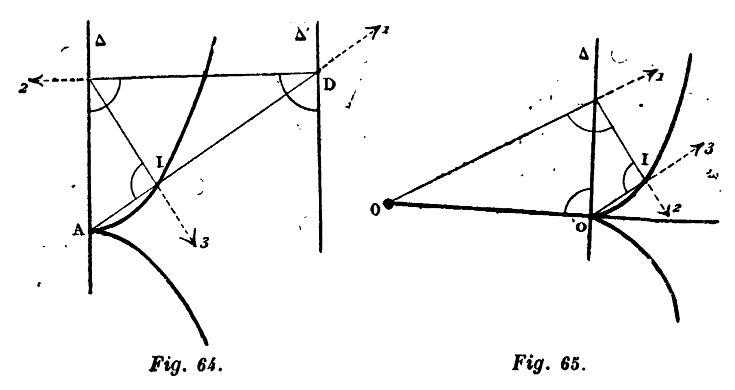


Fig. 64. *Fig. 65.*

la construction (1, 2, 3, *fig. 64*) (*). On obtient un point I qui décrit évidemment une cissoïde.

On peut présenter cette construction, dans une forme un

(*) Pour abréger, nous convénons de désigner ainsi une construction effectuée avec la règle et l'équerre dans l'ordre marqué par les chiffres qui sont placés sur la figure ; de plus, pour éviter toute ambiguïté nous indiquerons les angles droits par un petit arc de cercle. Enfin, dans les constructions qui ont pour objet la génération de certaines courbes, c'est la transversale 1 que nous supposerons mobile ; elle détermine la mobilité des autres droites 2, 3, etc.

peu différente, en effectuant la construction (1, 2, 3, *fig. 65*).

2° Aucune construction ne peut, croyons-nous, dépasser en rapidité celles que nous venons d'indiquer et qui n'exigent, pour la détermination d'un point de la cissoïde, que trois mouvements de la règle ou de l'équerre; mais en voici une qui, bien que plus compliquée, offre un intérêt particulier; elle permet, en effet, de construire une cissoïde dont l'asymptote Δ' ne peut être placée dans les limites de l'épure.

Soient O, O′, O″ trois points en ligne droite; on fait la construction (1, 2, 3, 4, 5, *fig. 66*); le point I décrit une cissoïde, quand la transversale 1 est supposée mobile.

En effet, si nous posons

$$O''I = \rho, \qquad IO''x = \omega, \qquad OO' = d, \qquad O'O'' = d',$$
$$OMO' = O''MI = \alpha,$$

nous avons

$$MO' = (d + d') \sin \omega, \quad \text{et} \quad \rho = (d + d') \sin \omega \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

D'autre part, le triangle OMO′ donne

$$\frac{d}{\sin \alpha} = \frac{MO}{\sin (\alpha + \omega)} = \frac{(d + d') \cos \omega}{\sin \alpha \cos \omega + \sin \omega \cos \alpha} \quad (2)$$

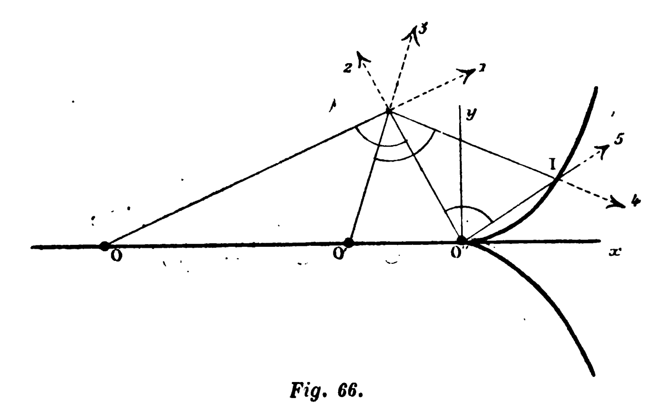


Fig. 66.

Si nous éliminons α entre (1) et (2) nous obtenons

$$\rho = \frac{d(d + d') \sin^2 \omega}{d' \cos \omega},$$

c'est bien l'équation de la cissoïde donnée plus haut. Le point O″ est le sommet de cette cissoïde et la distance du

point o'' à l'asymptote de la courbe est égale à h

$$h = \frac{d(d+d')}{d'}.$$

En supposant que d' est suffisamment petit on voit que cette longueur h peut être aussi grande que l'on voudra et l'on pourra construire la cissoïde, dans le voisinage de son sommet, sans avoir besoin de connaître l'asymptote de la courbe.

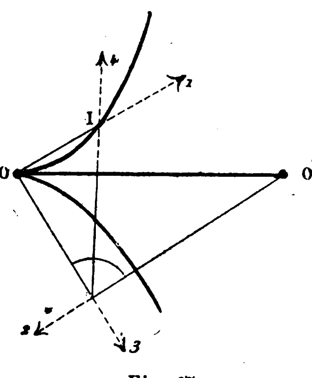


Fig. 67.

3° Prenons deux points o, O'; la construction (1, 2, 3, 4, *fig. 67)* donne un point I; ce point décrit une cissoïde, quand la transversale 1 tourne autour du point O.

Il serait de peu d'intérêt, croyons-nous, de multiplier ces constructions qui varient à l'infini; nous avons choisi les précédentes parmi celles qui offrent le plus d'intérêt et de simplicité, et nous allons maintenant nous occuper du tracé de la tangente à la cissoïde.

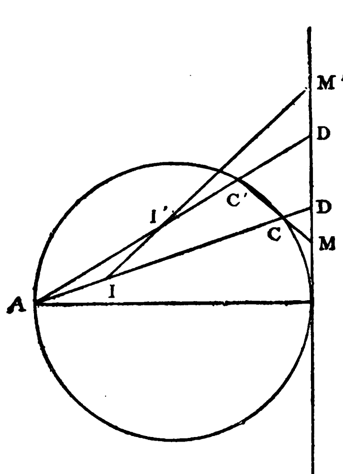


Fig. 68.

93. Tracé de la tangente. — Considérons deux transversales ACD, AC′D′ et prenons sur ces droites AI = CD, AI′ = C′D′; les deux points I et I′, ainsi obtenus, sont deux points de la cissoïde. Les deux droites C′C et I′I sont deux transversales réciproques, dans le triangle ADD′; on peut donc dire que les points M et M′ sont symétriques par rapport au milieu

de DD′. Si nous supposons maintenant que la transversale AC′D′ vienne se confondre avec ACD, la droite II′, par définition, a pour position limite la tangente, au point I, à la cissoïde et, d'autre part, CC′ devient, à la limite, la tangente au cercle au point C.

De cette remarque résulte une construction de la tangente à la cissoïde ; cette construction est indiquée sur la figure ci-dessous. Pour obtenir la tangente $I\mu'$, on a pris $D\mu = D\mu$.

Pour simplifier les explications, et aussi pour les rendre plus faciles à saisir, nous avons tracé, dans ces deux figures, le cercle qui admet AB pour diamètre ; mais il va sans dire que le tracé de ce cercle n'est pas nécessaire; et cette remarque a son importance, dans un livre où nous nous interdisons l'emploi du compas.

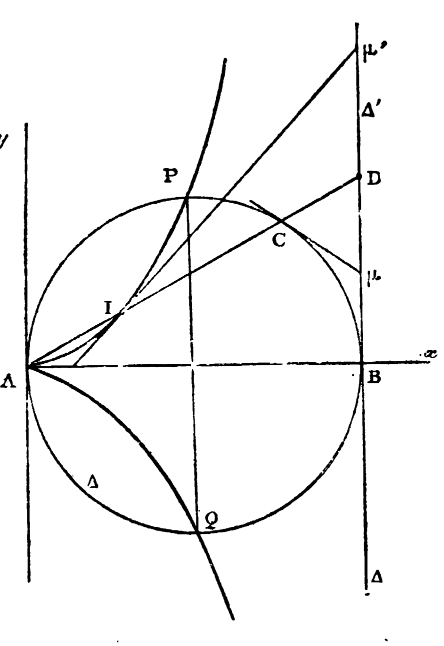


Fig. 69.

La *cissoïde oblique* donne lieu à une génération analogue et le tracé de la tangente en un point pris sur cette courbe résulte immédiatement de l'application du théorème des transversales réciproques; mais nous aurons occasion de retrouver cette courbe quand nous nous occuperons des cubiques circulaires.

(A suivre.)

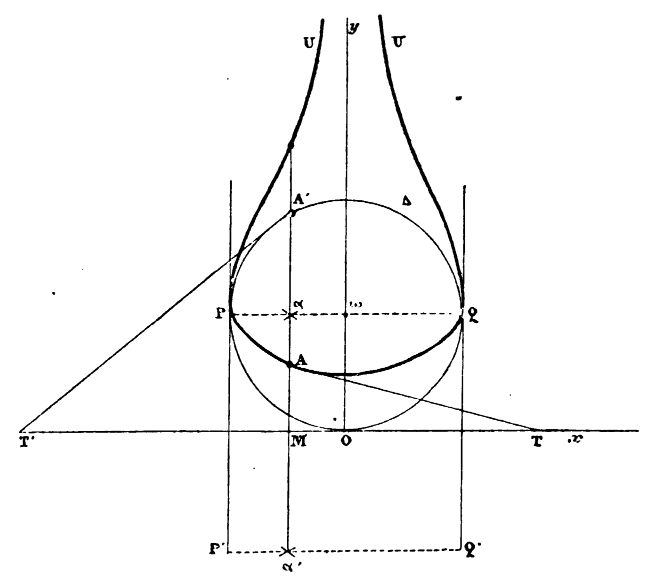
QUESTIONS D'EXAMENS

3. — *Construire, point par point, la courbe* U *qui correspond à l'équation*

$$y = \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}.$$

La discussion de cette équation prouve que la courbe a la forme générale indiquée par la figure ci-dessous.

La construction de la courbe, point par point, peut se faire



très rapidement en considérant U comme transformée d'un cercle au moyen des formules :

$$x = X, \quad yY = 1.$$

A la courbe U correspond un cercle Δ décrit du point (0, 1) comme centre avec un rayon égal à l'unité donnée. L'équation de Δ est, en effet,

$$X^2 + (Y - 1)^2 = 1.$$

A un point A′ de Δ correspond sur U un point A et l'on a :

$$MA \cdot MA' = O\omega^2.$$

D'après cela, si l'on considère les droites PQ, P′Q′ ($y = 1$, $y = -1$), les quatre points A, A′; α, α′ sont conjugués harmoniques.

Cette remarque permet de construire la courbe point par point, par un tracé simple et élégant.

On peut aussi observer que les tangentes aux points A, A′ coupent l'axe ox en deux points T, T′ symétriques par rapport à M.

Cette propriété remarquable, permettant de construire U *tangente par tangente*, se reconnaît immédiatement en prenant deux points voisins sur U et les points correspondants sur Δ.

(A suivre.)

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE

(1er JUILLET 1885.)

1. — Discuter la courbe représentée par l'équation

$$(x^4 - 5x^2 + 4)y^2 - 4xy + x^2 = 0.$$

2. — Reconnaître la nature des différentes surfaces représentées par l'équation du deuxième degré

$$x^2 + y^2 + hz^2 + 2axz + 2byz + 2cz = 0$$

quand les coefficients h, a, b, c prennent toutes les valeurs possibles.

Déterminer les sections circulaires de ces surfaces.

QUESTIONS 38 ET 40 (*)

Solution par M. Théogène ALEXANDRE, élève de Mathématiques spéciales au Lycée d'Angers.

On considère une ellipse E *rapportée à ses axes*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

par les sommets on fait passer une infinité de coniques S *et l'on*

(*) C'est par erreur que la question 40 a été proposée; elle est identique à la question 38. On arrive immédiatement au résultat en observant que l'exercice proposé revient au suivant : *On donne une ellipse* E ; *soit* A *un point de cette courbe,* A′ *le symétrique par rapport à l'un des axes. La tan-*

imagine une tangente commune à E *et à* S. *Le point de contact de cette droite avec* S *décrit un lieu géométrique; on construira ce lieu qui est une courbe du quatrième degré et l'on indiquera les points qui proviennent d'une ellipse* S, *ou d'une hyperbole* S.

(G. L.)

L'équation de l'ellipse E étant mise sous la forme

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0, \qquad (1)$$

l'équation de l'une quelconque de ces coniques S sera

$$a^2y^2 + 2\lambda xy + b^2x^2 - a^2b^2 = 0. \qquad (2)$$

Soit une tangente à E

$$bx \cos\varphi + ay \sin\varphi - ab = 0. \qquad (3)$$

En écrivant qu'elle est tangente à (2), on a la condition

$$\lambda(\lambda - 2ab \sin\varphi \cos\varphi) = 0\,; \qquad (4)$$

éliminons la solution $\lambda = 0$ qui donnerait la conique E elle-même, il reste

$$\lambda = 2ab \sin\varphi \cos\varphi. \qquad (5)$$

Les coordonnées du point de contact de (2) et (3), en tenant compte de (5), sont

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{a\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \\ y = \dfrac{b\sin\varphi}{\cos 2\varphi} \end{array}\right\}. \qquad (6)$$

L'équation (2) représente une ellipse si

$$\lambda^2 - a^2b^2 < 0,$$

une hyperbole si

$$\lambda^2 - a^2b^2 > 0.$$

En tenant compte de (5) on trouve que l'on a une ellipse si

$$\sin^2 2\varphi < 1\,;$$

pour avoir une hyperbole il faudrait que

$$\sin^2 2\varphi > 1\,:$$

---

gente en A *rencontre la droite qui joint* A' *au centre du cercle en un certain point* I. *Le lieu de* I *est la quartique qui correspond à l'équation* (1).

Pour montrer l'identité de cet exercice avec la question 38, on pourra s'appuyer sur le théorème suivant, théorème bien connu et d'une démonstration très simple : *Les sécantes communes à deux coniques rencontrent une tangente commune en deux points qui forment avec les points de contact une division harmonique.* Ce théorème peut, d'ailleurs, être considéré comme constituant un cas particulier du théorème de Desargues. G. L.

donc il n'y a pas de points provenant des hyperboles S, c'est-à-dire que si on considère une hyperbole S et l'ellipse E, il n'y aura pas de système de tangentes communes réelles pour ces deux coniques.

Construisons maintenant la courbe :

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\cos 2\varphi},$$

$$y = \frac{b \sin \varphi}{\cos 2\varphi}.$$

L'équation cartésienne est

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2 - a^2b^2(b^2x^2 + a^2y^2) = 0. \qquad (1)$$

Il y a quatre asymptotes réelles, deux à deux parallèles. qui correspondent respectivement aux équations :

$$y = \frac{b}{a}x \pm \frac{b}{\sqrt{2}},$$

$$y = -\frac{b}{a}x \pm \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Il est dès lors facile de construire la courbe.

Celle-ci se compose de quatre branches hyperboliques ordinaires, inscrites dans les angles formés par les asymptotes ; ces branches ont pour sommets respectifs les sommets de l'ellipse proposée.

NOTA. — Solution analogue par M. X. Barthe.

QUESTION 127

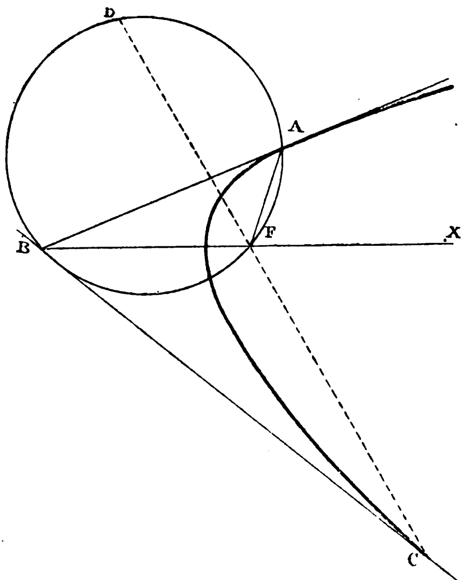
Solution par M. J. GIAT, élève de Mathématiques spéciales, Lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

Un cercle passe par le foyer d'une parabole et rencontre cette courbe au point A. *En ce point, on mène la tangente à la parabole, laquelle rencontre le cercle au point* B. *Au point* B *on mène la tangente au cercle. Démontrer que cette droite est tangente à la parabole.*

Dans une parabole :

1° La droite qui joint le foyer au point d'intersection de

deux tangentes, est bissectrice de l'angle sous lequel on voit du foyer leur corde de contact;



2° L'angle compris entre deux tangentes est la moitié de l'angle sous lequel est vue du foyer leur corde de contact.

Tout revient donc à démontrer ici que l'angle AFX est égal à l'angle ABC. C'est, en effet, ce qui a lieu, car ils ont pour supplément l'angle AFB.

Réciproquement. — Tout cercle tangent à BC au point B et passant par le point de contact A de la tangente BA, passe aussi par le foyer F, car ABC est la limite d'un triangle formé par trois tangentes à une parabole, et l'on sait que le cercle circonscrit à cette parabole passe par le foyer.

NOTA. — Ont résolu la question : MM. Vacquant, ancien élève de Mathématiques spéciales, à Lille ; Bêche, professeur à l'école normale de Tulle ; F. Gascouin, élève au lycée Henri IV ; Léon Clément, au lycée de Rouen ; Amaury de Kerdrel, au lycée de Brest.

M. Lamotte, élève au lycée de Versailles, généralise la question proposée.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(*Suite*, voir p. 45.)

II. — *Mathématiques spéciales.*

1. Première leçon sur les déterminants.
2. Multiplication des déterminants. — Déterminants adjoints.
3. Résolution d'un système de n équations linéaires à p inconnues. Cas où les équations sont homogènes.

4. Décomposition d'une fonction homogène du second degré de n variables, en une somme de carrés de fonctions linéaires homogènes des mêmes variables. — En supposant ces fonctions linéaires indépendantes, trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le nombre des carrés se réduise à $n - p$.

5. Première leçon sur les fractions continues.

6. Fractions continues illimitées; fractions continues périodiques; développement des irrationnels du deuxième degré en fractions continues.

7. Première leçon sur les séries.

8. Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ quand m croît indéfiniment. — Limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ pour une valeur réelle de x, quand m croît indéfiniment.

9. Définition de la fonction a^x. — Étude de cette fonction.

10. Application de la théorie des dérivées à l'étude des variations d'une fonction d'une seule variable. — Exemples.

11. Séries de Taylor et de Mac-Laurin. — Application au développement de arc tg x en série; calcul du nombre π.

12. Plus grand commun diviseur de deux ou de plusieurs polynômes. — Démontrer que si les polynômes u et v sont premiers entre eux, il existe un seul système de deux polynômes A et B, tel que l'on ait identiquement $Au + Bv = 1$, le degré de A étant inférieur à celui de v et le degré de B étant inférieur à celui de u.

13. Condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions entières d'une même variable admettent un diviseur commun. Application à l'élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques et entières.

14. Transformation des équations algébriques dans le cas où chaque racine de l'équation cherchée doit être une fonction rationnelle d'une ou de deux racines de l'équation donnée. — Exemples.

15. Abaissement des équations algébriques. — Exemples.

16. Règle des signes de Descartes.

17. Théorème de Rolle. — Applications.

18. Théorème de Sturm.

19. Résumer la marche à suivre pour résoudre une équation algébrique à coefficients numériques. — Méthode d'approximation de Newton.

20. Résolution de l'équation du quatrième degré. — Discussion dans le cas où les coefficients de cette équation sont des quantités réelles.

21. Résolution algébrique de l'équation du troisième degré.

22. Décomposition d'une fraction rationnelle en une somme de fractions simples.

23. Connaissant cos a, calculer cos $\frac{a}{m}$; connaissant sin a, trouver sin $\frac{a}{m}$.

24. Résolution de l'équation $x^m - 1 = 0$; application au calcul des côtés des polygones réguliers.

25. Asymptotes des courbes rapportées à des axes de coordonnées rectilignes (première leçon).

26. Recherche des sécantes communes à deux coniques. — Application à la détermination du nombre réel des points réels ou imaginaires communs à ces courbes.

27. Théorie des foyers dans les courbes du second ordre (première leçon).

28. Figures polaires réciproques. — Cas où la conique directrice est un cercle. — Applications.

29. Étant donnée l'équation d'une courbe rapportée à des axes de coordonnées rectilignes, trouver l'équation générale des courbes homothétiques à

la courbe donnée, et l'équation générale des courbes semblables à la même courbe.

30. Théorème des projections. — Application à la transformation des coordonnées dans l'espace (Première leçon).

31. Equation du plan tangent à une surface en un point de cette surface. — Problèmes sur les plans tangents aux surfaces du second ordre.

32. Recherche de l'équation d'une surface définie géométriquement. — Exemples.

33. Plans diamétraux dans les surfaces du second ordre.

34. Etude algébrique de l'équation en S.

35. Sections circulaires des surfaces du second degré. — Cas où la surface est rapportée à des axes rectangulaires quelconques.

36. Mener par une droite donnée un plan tangent à un hyberpoloïde de révolution à une nappe (Géométrie descriptive).

(A suivre.)

QUESTION PROPOSÉE

191. — Si une courbe parabolique représentée par

$$y = (x - a)(x - b) \ldots (x - k)$$

rencontre en A, B, ... K l'axe des abscisses, et que A′, B′, ... H′ soient les pieds des ordonnées des points pour lesquels la tangente est parallèle à cet axe on a

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \ldots + \frac{1}{AK} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{AA'} + \frac{1}{AB'} \ldots + \frac{1}{AH}\right].$$

(E. Catalan.)

Une lettre de M. Genocchi que j'ai reçue quand ce numéro était déjà composé m'apprend la mort de M. S. Realis, décédé à Turin, le 9 février dernier. M. Realis, dans ces dernières années avait porté un grand intérêt à cette publication et je me propose, si les documents que j'ai demandés me sont envoyés, de consacrer dans le prochain numéro du Journal (partie élémentaire) à cet homme aimable, quelques lignes de notice nécrologique; désirant payer ainsi à sa mémoire une partie de la reconnaissance que j'ai vouée à ce savant bienveillant, pour les encouragements et les conseils qu'il m'a toujours si obligeamment donnés. G. L.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3994-6.

SUR LE POINT DE STEINER

Par M. **J. Neuberg,** professeur à l'Université de Liège.

(*Suite et fin*, voir p. 51.)

7. — Avant d'aller plus loin, nous croyons utile de rappeler que le point de Steiner est : 1° le pôle trilinéaire de GK ; 2° le conjugué isogonal du point à l'infini sur la direction perpendiculaire à OK ; 3° le conjugué isotomique du point à l'infini sur la direction perpendiculaire à OG. Ce dernier point que nous désignons par F', est lui-même le conjugué isogonal du pôle trilinéaire F de la droite OK.

La transformée isogonale de la droite OK a pour équation

$$\frac{\sin(A_2 - A_3)}{\delta_1} + \frac{\sin(A_3 - A_1)}{\delta_2} + \frac{\sin(A_1 - A_2)}{\delta_3} = 0.$$

C'est l'hyperbole des neuf points qui a été étudiée récemment par M. Brocard (*). Cette courbe est aussi le lieu des points de concours C des droites joignant les points A_1, A_2, A_3 aux sommets C_1, C_2, C_3 de trois triangles isoscèles semblables, $A_2A_3C_1$, $A_3A_1C_2$, $A_1A_2C_3$ construits sur les côtés du triangle fondamental.

Ce lieu ayant été signalé, pour la première fois, par M. Kiepert (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 40-42), on pourrait l'appeler ***hyperbole de Kiepert***.

Nous allons faire connaître quelques nouvelles propriétés de cette conique.

Le pôle d'homologie a pour coordonnées normales

$$\sin(A_2 - A_3),\quad \sin(A_3 - A_1),\quad \sin(A_1 - A_2).$$

C'est donc le conjugué isogonal de F ou le point F' à l'infini sur la direction perpendiculaire à OG. En d'autres termes,

(*) *Journal de Math. spéc.*, 1884, p. 197-209 et 1885, p. 12, 30, 58, 76, 104, 123. L'identité de l'hyperbole des neuf points avec le lieu de Kiepert n'a pas été énoncée d'une manière explicite dans ces articles, bien qu'elle résulte immédiatement des points communs A_1, A_2, A_3, H, G, D.

N.-B. — Voyez plus loin, à ce propos, une lettre de M. Brocard. G. L.

les tangentes menées par A_1, A_2, A_3 *à l'hyperbole de Kiepert forment un triangle circonscrit* $F'_1F'_2F'_3$, *tel que les droites* $A_1F'_1$, $A_2F'_2$, A_1, F'_3 *sont perpendiculaires à* OG.

La transformation par polarité trilinéaire ou par points réciproques donne les théorèmes suivants :

L'hyperbole de Kiepert est le lieu du pôle trilinéaire d'une droite qui se déplace en restant perpendiculaire à OG. *Elle est aussi le lieu du réciproque d'un point mobile sur la droite* GK.

Soit φ l'angle à la base des triangles isoscèles $A_2A_3C_1$, $A_3A_1C_2$, $A_1A_2C_3$. Le rapport des distances de C à a_2 et a_3 est égal à celui des distances de C_1 à ces côtés ou égal à

$$\sin(A_3 - \varphi) : \sin(A_2 - \varphi).$$

On en déduit facilement que les coordonnées normales de C sont proportionnelles à

$$\frac{1}{\sin(A_1 - \varphi)}, \quad \frac{1}{\sin(A_2 - \varphi)}, \quad \frac{1}{\sin(A_3 - \varphi)}.$$

Aux valeurs $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ correspondent, respectivement, les points G et H. Lorsque $\varphi = A_1$, C coïncide avec le sommet A_1 ; de là la construction suivante de la tangente en A_1 : Construire sur A_2A_3 un triangle isoscèle dont l'angle à la base est égal à A_1, et en joindre le sommet à A_1.

Les points C_1, C_2, C_3 peuvent coïncider avec les sommets du triangle de Brocard $B_1B_2B_3$; alors φ est égal à l'angle α de Brocard, de sorte que les coordonnées de D sont inversement proportionnelles à $\sin(A_1 - \alpha)$, $\sin(A_2 - \alpha)$, $\sin(A_3 - \alpha)$.

Pour obtenir les directions des asymptotes, on peut exprimer que les droites A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 sont parallèles ou que le point C est sur la droite à l'infini, ce qui donne

$$\sum \frac{\sin A_1}{\sin(A_1 - \varphi)} = 0, \quad \text{ou} \quad \sum \frac{1}{\cot\varphi - \cot A_1} = 0,$$

ou

$$3\cot^2\varphi - 2\cot\alpha\cot\varphi + 1 = 0.$$

Mais il existe aussi deux valeurs de φ, pour lesquelles les points C_1, C_2, C_3 sont en ligne droite ; elles sont données par l'équation

$$\cot^2\varphi - 2\cot\alpha\cot\varphi + 3 = 0.$$

On voit qu'elles sont complémentaires de celles qui transportent le point C à l'infini.

L'hyperbole de Kiepert coupe le cercle $A_1A_2A_3$ en un point qui est déterminé par l'équation

$$\Sigma \sin A_1 \sin (A_1 - \varphi) = 0.$$

On trouve $\operatorname{tg} \varphi = \Sigma \operatorname{cotg} A_1 = \operatorname{cotg} \alpha$, donc les coordonnées de ce point sont proportionnelles à $\operatorname{séc}(A_1 + \alpha)$, $\operatorname{séc}(A_2 + \alpha)$, $\operatorname{séc}(A_3 + \alpha)$. Ce point est celui qui a été désigné par N (*) et qui, sur le cercle $A_1A_2A_3$, est diamétralement opposé au point de Steiner. En effet, 1° le point d'intersection de l'hyperbole avec le cercle est le conjugué isogonal du point à l'infini sur OK ; 2° les conjugués isogonaux des extrémités d'un diamètre du cercle $A_1A_2A_3$ sont à l'infini sur deux directions rectangulaires.

Le point de rencontre de l'ellipse E avec le lieu de Kiepert est déterminé par l'équation

$$\Sigma \frac{\sin (A_1 - \varphi)}{\sin A_1} = 0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg} \varphi = \frac{1}{3} \operatorname{cotg} \alpha.$$

Il est à l'intersection des droites joignant A_1, A_2, A_3 aux centres de gravité des triangles isoscèles construits sur a_1, a_2, a_3, et qui déterminent le point N.

8. — On peut généraliser la question précédente (**) en considérant trois triangles semblables quelconques $A_2A_3C_1$, $A_3A_1C_2$, $A_1A_2C_3$ et en cherchant la condition entre les angles $C_1A_2A_3 = \lambda$, $C_1A_3A_2 = \mu$, $A_2C_1A_3 = \nu$, nécessaire pour que les droites A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 concourent en un même point C. Si δ_1, δ_2, δ_3 sont les coordonnées de C, on a l'égalité

$$\frac{\delta_2}{\delta_3} = \frac{C_1A_3 \sin C_1A_3A_1}{C_1A_2 \sin C_1A_2A_1} = \frac{\sin \lambda \sin (A_3 - \mu)}{\sin \mu \sin (A_2 - \lambda)}$$
$$= \frac{\sin A_3}{\sin A_2} \cdot \frac{\operatorname{cotg} \mu - \operatorname{cotg} A_3}{\operatorname{cotg} \lambda - \operatorname{cotg} A_2}, \qquad (3)$$

(*) Nous avons proposé récemment, pour ce point, la dénomination de *point de Tarry*.

(**) Cette généralisation fait l'objet de la question 7, *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. VI, 1882, p. 24. M. Casey, à qui nous avions communiqué quelques-uns des résultats précédents, a démontré ces propositition et d'autres analogues par des procédés très remarquables. (Voir son « Treatise on the Analytical Geometry », pp. 249 et 250.)

et deux autres analogues, qui multipliées l'une par l'autre donnent

$$(\cot \lambda - \cot A_1)(\cot \lambda - \cot A_2)(\cot \lambda - \cot A_3)$$
$$= (\cot \mu - \cot A_1)(\cot \mu - \cot A_2)(\cot \mu - \cot A_3).$$

Cette équation se décompose en deux autres :

$$\cot \lambda - \cot \mu = 0, \quad \cot^2 \lambda + \cot \mu \cot \lambda + \cot^2 \mu$$
$$- (\cot \lambda + \cot \mu) \cot \lambda + 1 = 0,$$

dont la première correspond à la conique de Kiepert, et dont la seconde, ajoutée à l'identité

$$\cot \lambda \cot \mu + \cot \mu \cot \nu + \cot \nu \cot \lambda - 1 = 0,$$

donne

$$\cot \lambda + \cot \mu + \cot \nu = \cot \alpha.$$

On conclut, de là, que les triangles $A_2A_3C_1$, $A_3A_1C_2$, $A_1A_2C_3$ doivent avoir même angle de Brocard que le triangle fondamental $A_1A_2A_3$. Un calcul facile en coordonnées cartésiennes montre que les points C_1, C_2, C_3 décrivent trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) passant respectivement par A_1, A_2, A_3 et coupant orthogonalement les cercles dont A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 sont des rayons en grandeur et en position

Si l'on met les équations (3) sous la forme

$$\delta_2 \sin A_2 \cot \lambda - \delta_3 \sin A_3 \cot \mu - \delta_2 \cos A_2 + \delta_3 \cos A_3 = 0, \ldots$$

et qu'on les ajoute ensemble, on trouve

$$(\cot \lambda - \cot \mu)(\delta_1 \sin A_1 + \delta_2 \sin A_2 + \delta_3 \sin A_3) = 0.$$

Le second facteur de cette égalité indique que les droites A_1C_1, A_2C_2, A_3C_6 sont parallèles. On en déduit facilement que les centres de gravité des triangles $A_1A_2C_3$, $A_2A_3C_1$, $A_3A_1C_2$ sont en ligne droite avec G. Ces centres de gravité étant également les sommets de trois triangles semblables construits sur A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, nous retrouvons ici un résultat déjà signalé par M. M'Cay (*Irish Academy*, 1885) et par nous (*Mathesis*, t. II, pp. 76, 157. 186).

LE CENTRE DE LA CONIQUE DE KIEPERT

Par M. G. de Longchamps.

1. — On sait (*) que la conique de Kiepert est celle qui, en coordonnées barycentriques, correspond à l'équation

$$(b^2 - c^2)\beta\gamma + (c^2 - a^2)\gamma\alpha + (a^2 - b^2)\alpha\beta = 0. \qquad (K)$$

La détermination du centre ζ de cette conique remarquable n'a pas encore, croyons-nous, donné lieu à une construction élégante et M. Brocard (*loc. cit.*, p. 30), après avoir donné les formules qui permettent de calculer les coordonnées de ce point ajoute : « Ces formules ne semblent pas conduire à un résultat simple. » Voici une remarque, concernant le point ζ, de laquelle résulte une solution assez élégante du problème en question.

2. — Dans une question proposée récemment (**), M. Brocard appelle l'attention sur la polaire du centre de gravité E d'un triangle ABC, relativement au cercle de Brocard.

L'équation d'une conique étant

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

on sait que la polaire d'un point α_0, β_0, γ_0 est représentée par

$$\alpha_0 f'_\alpha + \beta_0 f'_\beta + \gamma_0 f'_\gamma = 0.$$

Pour le point E, centre de gravité du triangle de référence, on a

$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0;$$

l'équation de la polaire de ce point est donc

$$f'_\alpha + f'_\beta + f'_\gamma = 0.$$

En appliquant cette formule à l'égalité

$$b^2c^2\alpha^2 + a^2c^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2 - a^4\beta\gamma - b^4\alpha\gamma - c^4\alpha\beta = 0,$$

qui représente le cercle de Brocard, on a

(*) Voyez *Journal*, 1885, p. 12 : *Propriétés de l'Hyperbole des neuf points*, par M. Brocard. Voyez aussi, sur la conique de Kiepert, l'article de M. Neuberg dans le présent numéro (*Sur le point de Steiner*, p. 73).

(**) *Educational Times* (1er mars 1886), question 8485.

$$(b^2 - c^2)^2\alpha + (c^2 - a^2)^2\beta + (a^2 - b^2)^2\gamma = 0. \qquad (1)$$

Nous désignerons la droite qui correspond à cette équation par ε; c'est une droite remarquable du plan d'un triangle et la détermination du centre ζ de la conique de Kiepert découle de la connaissance de ε, comme nous allons l'indiquer.

3. — Cherchons les coordonnées $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ de ζ. Le centre d'une conique étant le pôle de la droite de l'infini $(\alpha + \beta + \gamma = 0)$, les coordonnées de ce point vérifient les égalités

$$f'_\alpha = f'_\beta = f'_\gamma.$$

Appliquons ces formules à l'équation (K); nous avons, après calcul,

$$\frac{\alpha_0}{(b^2 - c^2)^2} = \frac{\beta_0}{(c^2 - a^2)^2} = \frac{\gamma_0}{(a^2 - b^2)^2}. \qquad (2)$$

Il nous reste à expliquer comment, d'après les formules (1) et (2), la droite ε et le point ζ sont associés l'un à l'autre.

4. — Lorsqu'on joint un point M du plan d'un triangle ABC aux trois sommets, ces droites rencontrent les côtés en M_a, M_b, M_c; les conjugués harmoniques de ces trois points sont situés sur une droite μ; nous dirons pour rappeler cette construction que M et μ sont *harmoniquement associés*.

En représentant par α', β', γ' les coordonnées de M, l'équation de la droite harmoniquement associée est, d'après cela, représentée par

$$\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} + \frac{\gamma}{\gamma'} = 0,$$

et la droite μ^{-1}, transversale réciproque de μ, par

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

En comparant les égalités (1) et (2) on est ainsi conduit au théorème suivant :

Le centre de la conique de Kiepert est le point harmoniquement associé à la transversale réciproque de la polaire du centre de gravité du triangle de référence par rapport au cercle de Brocard.

5. — La droite ε qui, dans la construction que nous proposons, sert à déterminer le centre de la conique de Kiepert, se construit d'ailleurs assez facilement en observant : 1° qu'elle passe par le point de Steiner R; 2° qu'elle est perpendiculaire

à la droite qui joint le point de Tarry N, au centre Z du cercle de Brocard.

Le point de Steiner(R) se détermine par une construction très simple que nous indiquerons bientôt (*); le point de Tarry (N) est, sur le cercle circonscrit, diamétralement opposé; la droite NZ s'obtient en joignant N au centre de gravité (E) du triangle. De ces remarques diverses résulte le tracé de ε et par suite la détermination du point ζ.

6. — Les formules (2) conduisent encore à une remarque bien intéressante, qui m'a été communiquée par M. Neuberg. Cherchons le point ζ_0 *anti-complémentaire* de ζ, point dont les coordonnées α_0, β_0, γ_0 sont proportionnelles à $-\alpha+\beta+\gamma$, $-\beta+\alpha+\gamma$, $-\gamma+\alpha+\beta$, on trouve facilement

$$\alpha_0(b^2-c^2)=\beta_0(c^2-a^2)=\gamma_0(a^2-b^2);$$

ainsi ζ_0 est précisément le point de Steiner. Concluons donc que *le centre de la conique de Kiepert s'obtient en joignant le point de Steiner au centre de gravité, et en partageant cette droite d'une longueur moitié moindre.*

SUR UNE QUARTIQUE UNICURSALE

Par M. **Maurice d'Ocagne**, ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. — La quartique unicursale que nous avons en vue dans cette Note est celle que M. de Longchamps a envisagée dans son intéressante étude *sur les courbes parallèles et quelques autres courbes remarquables* (**) et dont il a indiqué plusieurs propriétés en émettant le vœu que la théorie de cette courbe fût poussée plus avant.

Cette quartique unicursale que M. de Longchamps désigne par la notation γ_4, et dont on trouvera la figure dans le Mémoire cité (***), possède trois axes de symétrie, trois points

---

(*) Dans notre étude sur le cercle Δ.

(**) *Journal de Mathématiques spéciales*, 1885, p. 269.

(***) *Ibidem*, 1885, p. 272.

doubles réels, trois tangentes doubles réelles. Elle est définie de la manière suivante :

On prend sur un cercle donné Δ, *à partir d'un point fixe* S, *deux arcs de sens contraires* SA *et* SB *tels que*

$$\text{arc SB} = 2 \text{ arc SA};$$

on joint les points A *et* B *par une droite, et on prend sur cette droite le point* C *tel que* BC = AB. *Le point* C, *lorsqu'on fait varier les points* A *et* B *sur le cercle* Δ, *engendre la courbe* γ_4.

M. de Longchamps a fait connaître l'équation cartésienne et l'équation polaire de la courbe γ_4 en prenant pour axe des x la droite qui joint le centre O du cercle Δ au point S, et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite menée par O. Voici ces équations

$$y^4 + y^2\left(2x^2 + 3Rx - \frac{27}{4}R^2\right) + (x - R)(x - 3R)\left(x + \frac{3R}{2}\right)^2 = 0; \qquad (1)$$

$$\rho^4 - R\rho^3 \cos 3\omega - \frac{27}{4}R^2\rho^2 + \frac{27}{4}R^4 = 0. \qquad (2)$$

R représente le rayon du cercle Δ.

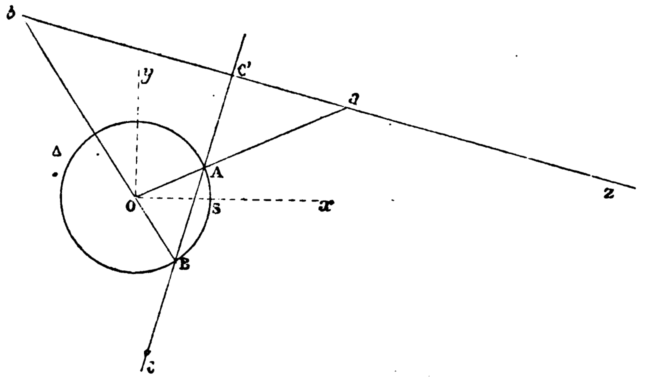
2. — Si deux rayons OA et OB d'un cercle de centre O, et de rayon R, tournent autour de ce centre avec des vitesses qui sont entre elles dans le rapport de n à m, la corde AB qui joint les extrémités de ces rayons enveloppe une épicycloïde décrite par un point du cercle de rayon $\frac{Rm}{m+n}$, roulant sur le cercle de rayon $\frac{R(n-m)}{n+m}$, qui a pour centre le point O (*).

Ici, il faut faire $n = 2, m = -1$. Cela donne pour rayon du cercle roulant $(-R)$, et pour rayon du cercle fixe 3R. Or on sait, par la théorie des roulettes, qu'un cercle de rayon

(*) Ce théorème a été démontré par M. Ph. Gilbert dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (4e année, 1880, p. 159). Dans le cas où $n = 12, m = 1$, on tombe sur l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des aiguilles d'une montre, problème qui avait été traité par M. Mannheim dans son *Cours de géométrie descriptive*. Le même problème a été résolu analytiquement par M. Brocard en 1872 dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (2e série, t. XI, p. 329).

(— R) roulant sur un cercle de rayon 3R, c'est un cercle de rayon R roulant *à l'intérieur* du cercle de rayon 3R. Par suite, *l'enveloppe de la droite* AB *est une hypocycloïde* (C') *à trois rebroussements engendrée par un cercle de rayon* R *roulant dans un cercle de rayon* 3R *et de centre* O.

Il est facile de déterminer le point où la droite AB touche cette hypocycloïde et le centre de courbure correspondant. En effet, soit C' ce point de contact. En C' élevons une perpendiculaire à AB; c'est la normale à l'hypocycloïde. Cette normale coupe aux points a et b les normales OA et OB au



cercle Δ, et on a, pour les expressions, des arcs infiniment petits d (A) et d (B) décrits simultanément par les points A et B,

$$d(A) = Aa \cdot \varepsilon,$$
$$d(B) = Bb \cdot \varepsilon,$$

ε étant l'angle de contingence de l'hypocycloïde au point C'. Comme on a évidemment

$$d(B) = 2 \cdot d(A),$$

il en résulte que

$$Bb = 2 \cdot Aa.$$

Mais les angles C'Bb et C'Aa étant égaux, les triangles C'Bb et C'Aa sont semblables. Donc

$$BC' = 2AC'$$

ou

$$AC' = BA,$$

ce qui détermine le point C'.

Soit maintenant z le centre de courbure correspondant. On a

$$d\ .\ \mathrm{BA} = ba\ .\ \varepsilon,$$
$$d\ .\ \mathrm{AC'} = az\ .\ \varepsilon.$$

Par suite,

$$az = ba,$$

ce qui détermine le centre de courbure z.

Avant d'aller plus loin nous ferons une remarque au sujet de l'hypocycloïde décrite par le point C′. Supposons cette hypocycloïde tracée; elle fournira le moyen d'opérer graphiquement la trisection de l'angle. En effet, il suffira de tracer, du point O comme centre, un cercle tangent à une corde sous-tendant, dans le cercle Δ, un arc égal à l'angle à trisecter, et de mener une tangente commune à ce cercle et à l'hypocycloïde considérée.

J'arrive maintenant à la quartique γ_4.

3. — L'ingénieuse détermination de la tangente à γ_4 donnée par M. de Longchamps (§ 37 du Mémoire cité) se simplifie beaucoup par la remarque suivante (voir la figure de la page 272 du tome précédent).

Les triangles APC et AQC′ étant semblables, puisque CP est parallèle à C′Q, et la longueur AC étant double de AC′, on a

$$\mathrm{QA} = \frac{\mathrm{AP}}{2}.$$

Donc

$$\mathrm{PQ'} = \frac{\mathrm{AP}}{2},$$

et la construction de la tangente se réduit à ceci : *Prolonger le segment de tangente* AP *au cercle* Δ *de la moitié de sa longueur et joindre le point* Q′ *ainsi obtenu au point* C.

Remarquons en outre que, si R est le point où la tangente CQ à γ_4 coupe la tangente BP au cercle Δ, le théorème des transversales donne

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} \cdot \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RP}} \cdot \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{QA}} = 1$$

ou

$$2 \cdot \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RP}} \cdot \frac{1}{3} = 1;$$

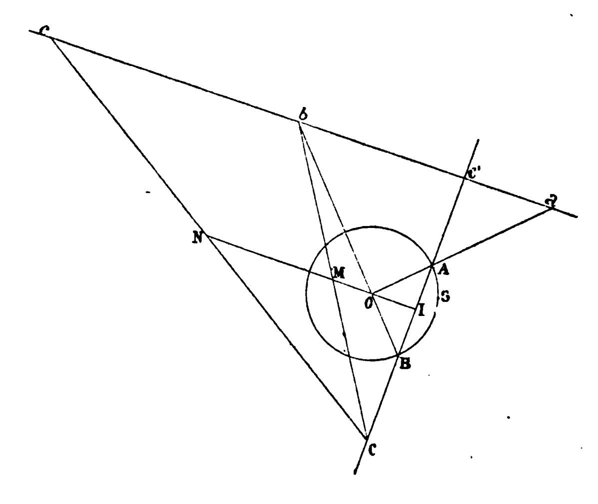
d'où l'on tire

$$\frac{RB}{RP} = \frac{3}{2},$$

et, par suite,

$$RP = 2 . PB.$$

4. — Soit Cc la normale au point C à la quartique γ_4.



Cette normale coupe en c la normale à l'hypocycloïde enveloppe de AB, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en C' à AB. On a

$$d.AB = ab.\varepsilon$$
$$d.BC = bc.\varepsilon$$

et comme AB = BC,

$$qa = bc.$$

Du point O abaissons sur AB la perpendiculaire OI; cette droite coupe les droites Cb, Cc aux points M et N.

OI est parallèle à ac; de plus I est le milieu de CC'. Donc

$$IM = \frac{C'b}{2} = ac',$$

$$MN = \frac{bc}{2} = \frac{3.ac'}{2}.$$

Mais les triangles OIA et $aC'A$ donnent

$$OI = \frac{ac'}{2}.$$

Donc

$$OM = IM - IO = \frac{ac'}{2} = IO,$$

$$MN = 3.IO,$$

et, par suite,

$$ON = 4IO.$$

De là ce théorème :

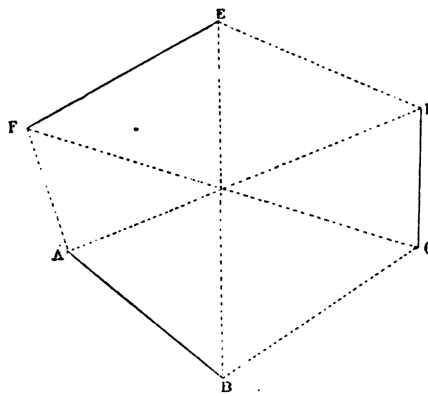
Si du centre O *on abaisse la perpendiculaire* OI *sur la droite* AB *et que l'on porte sur cette droite le segment* ON *égal au quadruple de* IO, *la droite* CN *est normale en* C *à la quartique* γ_4. Ce théorème donne une détermination simple de la normale, et, par suite, de la tangente.

(A suivre.)

DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME DE BRIANCHON

Par M. **Darzens**, élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Considérons une conique et un hexagone *abcdef* qui lui est circonscrit ; il est bien évident que cette conique peut toujours être regardée comme le contour apparent d'un hyperboloïde ; et, alors, chaque côté de l'hexagone sera la projection de deux génératrices de systèmes différents de cet hyperboloïde. Cela étant, formons dans l'espace, au moyen de ces génératrices, un hexagone gauche qui se projette sui-



vant *abcdef* et dont deux côtés consécutifs sont, par conséquent, de systèmes différents.

Soit ABCDEF un tel hexagone dans lequel les génératrices d'un système sont marquées en traits pleins et celles de l'autre en traits ponctués. AB et ED, étant de systèmes différents, se rencontrent et déterminent un plan. Il en sera de même : 1° de AF associé à DC; 2° de BC associé à FE. Ces trois plans ainsi définis se coupent deux à deux suivant trois droites qui sont évidemment concourantes. Or il est facile de voir que l'intersection du plan ABED et du plan AFDC est la droite AD, qui joint deux sommets opposés de l'hexagone; il en sera de même pour les deux autres droites EB et FC et le théorème de Brianchon se trouve ainsi démontré.

Dans le cas où la conique proposée est une parabole, on doit prendre, pour reproduire le raisonnement précédent, un paraboloïde hyperbolique.

SUR UN NOUVEAU CERCLE REMARQUABLE

DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 57.)

8. Théorème. — *Le cercle* Δ *est orthogonal aux cercles décrits des milieux des côtés du triangle* ABC, *comme centres, avec les médianes correspondantes pour rayons.*

En effet si, dans l'équation

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos C - 2cx \cos B - 2cy \cos A + c^2 = 0,$$

on substitue aux coordonnées courantes celles du milieu de AB $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, on a

$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab \cos C}{4}.$$

Cette expression représente bien le carré de la longueur de la médiane issue du sommet C.

La proposition en question se trouve ainsi démontrée et, en nous rappelant la définition de Δ, pour la rapprocher de la propriété précédente, nous voyons déjà que Δ *est orthogonal à six cercles* ayant pour centres les sommets ou les milieux des côtés du triangle, et pour rayons : les uns, les côtés du triangle; les autres, les médianes. Mais nous allons montrer que cette double propriété rentre dans un théorème plus général que nous allons établir.

9. Théorème. — *Si l'on considère sur un des côtés* BC *du triangle* ABC *deux points isotomiques* (*) I, I', *le cercle* Δ *est orthogonal au cercle décrit du point* I *comme centre avec* AI' *pour rayon.*

En effet, soit $CI = x_0$; la puissance ζ du point I est

$$\zeta = x_0^2 - 2cx_0 \cos B + c^2,$$

ou

$$\zeta = (x_0 - c \cos B)^2 + c^2 \sin^2 B.$$

D'ailleurs, on a

$$CI = x_0 = BI',$$

et

$$BH = c \cos B,$$

H désignant le pied de la hauteur issue de A.

Ces égalités donnent

$$x_0 - c \cos B = BI' - BH = - I'H,$$

et, par suite,

$$\zeta = \overline{I'H}^2 + c^2 \sin^2 B = \overline{I'H}^2 + \overline{AH}^2,$$

ou, finalement,

$$\zeta = \overline{AI'}^2.$$

Ainsi Δ est orthogonal au cercle décrit de I comme centre, avec AI' pour rayon.

On observera qu'en plaçant le point I en C on a les trois cercles décrits des sommets du triangle avec les côtés correspondants pour rayons; en supposant ensuite le point I en M,

(*) J'appelle ainsi deux points symétriques par rapport au milieu du segment BC. Le terme *isotomique* a été proposé par M. Neuberg pour désigner les points que je nomme *réciproques ;* cette dernière expression me paraît préférable, mais le mot de M. Neuberg s'applique remarquablement bien aux points I, I' dont il est ici question.

milieu de BC, les deux points isotomiques se confondent et l'on retrouve les trois cercles que nous avons considérés dans le paragraphe précédent.

En résumé, le cercle Δ jouit de la propriété qui nous semble bien remarquable d'être orthogonal à un système de cercles, triplement infini, cercles se rattachant au triangle ABC par la construction simple que nous venons d'indiquer.

10. Le cercle Δ et le cercle circonscrit. — Cherchons les points communs à Δ et au cercle circonscrit.

L'équation (§ 3, p. 58):

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

prouve que l'axe radical de Δ et du cercle circonscrit est représenté par l'égalité

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0.$$

La droite δ qui correspond à cette équation et que l'étude du cercle Δ met en évidence est une des droites remarquables du plan d'un triangle; nous allons indiquer quelques-unes de ses propriétés.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

4*. — *Sur une droite Δ, on considère deux points mobiles A, B décrivant sur cette droite deux divisions homographiques: trouver l'enveloppe des cercles Γ décrits sur AB comme diamètre.*

Soit O l'origine des divisions homographiques en question; en posant

$$OA = \alpha, \qquad OB = \beta,$$

on a, par hypothèse, entre les variables α, β la relation

$$K\alpha\beta + a\alpha + b\beta + c = 0.$$

On doit alors, dans cette question, distinguer plusieurs cas, suivant que le paramètre K est nul ou différent de zéro, et suivant que la relation est, ou n'est pas en involution.

Premier cas. $K = 0$. — La relation homographique proposée est alors

$$a\alpha + b\beta + c = 0. \qquad (1)$$

Changeons l'origine des divisions et posons

$$\alpha = \alpha' + t, \qquad \beta = \beta' + t;$$

l'égalité (1) devient

$$a\alpha' + b\beta' + at + bt + c = 0.$$

Deux cas se présentent alors tout naturellement si l'on veut disposer du paramètre t de façon à simplifier l'équation homographique, et, en posant, dans cette intention,

$$t(a + b) + c = 0.$$

Ces deux cas que nous devons distinguer ici correspondent aux hypothèses :

$$a + b = 0, \qquad a + b \neq 0.$$

1° Soit d'abord $a + b = 0$; alors a et b ne sont pas nuls si l'on ne veut pas que l'égalité (1) représente une impossibilité ou une indétermination. Supposons donc $a \neq 0$, l'égalité (1) prouve que

$$\alpha - \beta = -\frac{c}{a},$$

et que, par suite, la longueur AB est constante. L'enveloppe des cercles Γ est donc constituée par l'ensemble de deux droites parallèles à AB.

2° Soit maintenant $a + b \neq 0$. Dans ce cas, on peut résoudre l'équation (2) par rapport à t; et, en posant

$$t = -\frac{c}{a + b},$$

la relation homographique proposée prend la forme réduite

$$a\alpha' + b\beta' = 0. \qquad (3)$$

Il est facile de vérifier que les cercles Γ enveloppent un système de deux droites passant par la nouvelle origine.

L'équation de Γ étant

$$x^2 + y^2 - \lambda x + \mu = 0,$$

on a

$$\alpha' + \beta' = \lambda, \qquad \alpha'\beta' = \mu. \qquad (4)$$

L'élimination de α' et de β' entre (3) et (4) donne

$$\lambda^2 ab + \mu(a - b)^2 = 0.$$

Si $a = b$, hypothèse qui correspond au cas où la relation donnée est en involution, on a $\lambda = 0$, les cercles proposés sont concentriques et ils passent doublement par les ombilics du plan.

Au contraire, si l'on suppose $a - b \neq 0$, on a

$$x^2 + y^2 - \lambda x - \frac{\lambda^2 ab}{(a-b)^2} = 0,$$

et l'enveloppe des cercles Γ est représentée par l'équation

$$x^2(a+b)^2 + 4aby^2 = 0.$$

L'enveloppe demandée est constituée par l'ensemble de deux droites passant par l'origine ; ces droites sont réelles ou imaginaires suivant que ab est négatif ou positif.

Second cas. $K \neq 0$. — Revenons maintenant au cas général et supposons K différent de zéro.

L'équation homographique est alors

$$K\alpha\beta + a\alpha + b\beta + c = 0,$$

et l'on doit encore distinguer deux cas, suivant que $a - b$ est nul ou différent de zéro.

1° Si $a - b = 0$, auquel cas l'équation homographique est en involution, les égalités

$$\alpha\beta + a(\alpha + \beta) + c = 0, \qquad \alpha + \beta = \lambda, \qquad \alpha\beta = \mu,$$

donnent, entre les paramètres λ et μ, la relation

$$\mu + a\lambda + c = 0.$$

L'équation générale des cercles Γ est alors

$$x^2 + y^2 - \lambda(x + a) - c = 0,$$

ils passent par deux points fixes, résultat bien connu.

2° Abordons enfin le cas général et supposons $a - b \neq 0$. Nous pouvons toujours poser $K = 1$ et prendre l'équation homographique sous la forme

$$\alpha\beta + a\alpha + b\beta + c = 0.$$

L'élimination de α et de β entre cette équation et les relations :

$$\alpha + \beta = \lambda, \qquad \alpha\beta = \mu,$$

donne

$$-\mu(a-b)^2 = (c + b\lambda + \mu)(c + a\lambda + \mu).$$

Cette égalité peut s'écrire :

$$\frac{\mu(a-b)}{\mu + b\lambda + c} = \frac{\mu + a\lambda + c}{b - a} = t.$$

De ces proportions on tire, après calcul :

$$\lambda(a - t) = t^2 + (b - a)t - c,$$
$$\mu(a - t) = ct - bt^2.$$

L'équation générale des cercles Γ est donc

$$t^2(x+b) + t[x^2 + y^2 + x(b-a) - c] + a(x^2 + y^2) + cx = 0.$$

L'enveloppe cherchée s'obtient en exprimant que cette équation en t a ses racines égales et l'on a, finalement,

$$(x^2+y^2)^2 + 2x(x^2+y^2)(a+b) + x^2[(a+b)^2 + 2c] + 2y^2(2ab-c) + 2cx(a+b) + c^2 = 0.$$

Cette équation représente deux cercles (*). On peut s'en assurer en appliquant à cette relation le procédé que nous avons indiqué (**) pour décomposer en deux facteurs les quartiques bicirculaires, quand la décomposition est possible. On trouve ainsi que l'équation précédente peut s'écrire :

$$[x^2 + y^2 + x(a+b) + c]^2 + 4y^2(ab-c) = 0.$$

Sous cette forme on voit nettement que l'enveloppe demandée est l'ensemble de deux cercles réels, imaginaires ou coïncidents suivant le signe de la quantité $ab - c$.

En posant

$$c - ab = h^2,$$

les cercles trouvés sont représentés par

$$x^2 + y^2 + x(a+b) \pm 2hy + ab + h^2 = 0.$$

La réalité de ces cercles, sans qu'il soit nécessaire de recourir au discriminant, résulte de la forme même de cette équation qui peut s'écrire :

$$(x+a)(x+b) + (y \pm h)^2 = 0,$$

forme sous laquelle des solutions réelles sont évidentes.

Les calculs précédents sont sensiblement abrégés en prenant pour origine un des points doubles des divisions homographiques données. Mais ces points peuvent être imaginaires et, pour généraliser les résultats obtenus, il est alors nécessaire d'invoquer le principe de continuité de Poncelet.

(A suivre.)

(*) C'est par erreur que cette équation a été donnée (Kœhler, *Ex. de géom. an.*, p. 19) comme représentant une courbe du quatrième ordre se décomposant en deux cercles quand $a = b$. Elle représente toujours deux cercles ; seulement, si $a = b$, les cercles Γ passent par deux points fixes.

(**) *Journal*, 1881 ; p. 36.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Brocard.

... Je m'empresse de vous accuser réception et de vous remercier de la très intéressante remarque de M. Neuberg. L'identité de la conique de Kiepert avec l'hyperbole équilatère des neuf points m'avait entièrement échappé, bien qu'elle résultât immédiatement des équations

$$\frac{\sin(A - B)}{\gamma} + \frac{\sin(C - A)}{\beta} + \frac{\sin(B - C)}{\alpha} = 0, \quad (1)$$

et

$$(a^2 - b^2)\, ab\alpha\beta + (c^2 - a^2)\, ac\alpha\gamma + (b^2 - c^2)\, bc\beta\gamma = 0;$$

mais l'idée de les identifier ne se présente point, parce que l'on a moins l'habitude de remplacer sin (A — B), etc., par $\frac{a^2 - b^2}{c}$, que sin A par a, etc.

La remarque de M. Neuberg me semble donc nouvelle, et de nature à augmenter l'intérêt de l'étude de l'hyperbole Γ, qui joue ainsi un rôle plus important dans la géométrie du triangle. Cette hyperbole remarquable méritait donc un examen attentif, et je félicite M. Neuberg d'avoir bien voulu reprendre et compléter mes recherches sur les coniques associées au triangle.

On peut s'étonner qu'aucun géomètre n'ait eu jusqu'à ce jour l'idée de vérifier si l'équation (1) représentait une hyperbole équilatère, et cependant cette vérification était très simple et presque immédiate. A un autre point de vue, la remarque de M. Neuberg est une conséquence des principes posés par M. Mathieu dans l'étude de géométrie comparée fondée sur la transformation par droites symétriques (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 393, 481 et 529). Dans ce mode de transformation, le cercle circonscrit au triangle est la transformée de la droite de l'infini $\Sigma\alpha \sin A = 0$. Il a donc pour équation $\Sigma \frac{\sin A}{\alpha} = 0$. L'hyperbole équilatère Γ est la trans-

formée de la droite OK représentée par l'équation

$$\Sigma\alpha \sin (B - C) = 0.$$

Cette hyperbole a donc pour équation $\Sigma \frac{\sin (B - C)}{\alpha} = 0$.

Les paraboles tangentes à deux côtés du triangle aux extrémités du troisième ont pour équations $a^2\alpha^2 - 4bc\beta\gamma = 0$, etc. Les ellipses transformées sont donc représentées par les équations $\frac{a^2}{\alpha^2} - \frac{4bc}{\beta\gamma} = 0$, ou $a^2\beta\gamma - 4bc\alpha^2 = 0$, etc.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(*Suite*, voir p. 70.)

Sujets de leçons.

I. — *Mathématiques élémentaires*.

1. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres entiers. (On n'emploiera pas la décomposition en facteurs premiers.)
2. Premières leçons sur les nombres premiers.
3. Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. — Fractions périodiques.
4. Racine carrée des nombres entiers.
5. Mesure des angles.
6. Homothétie (géométrie plane).
7. Polygones réguliers, convexes ou étoilés.
8. Recherche du rapport de la circonférence au diamètre.
9. Divison harmonique. — Faisceau harmonique. — Pôle et polaire par rapport à deux droites. — Pôle et polaire par rapport à un cercle.
10. Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Axe radical de deux cercles . — Centre radical de trois cercles. — Applications.
11. Transformation par rayons vecteurs réciproques. — Applications.
12. Angles trièdres. — Trièdres supplémentaires — Conditions nécessaires. et suffisantes pour qu'on puisse construire un trièdre avec trois faces données, ou avec trois dièdres donnés.
13. Première leçon sur la mesure des volumes.
14. Figures homothétiques dans l'espace. — Cercle d'homothétie. — Axe d'homothétie. — Plan d'homothétie. — Application à un système de quatre sphères
15. Sphère tangente à quatre plans.
16. Triangles sphériques. — Triangles sphériques polaires réciproques.
17. Aire d'un fuseau, aire d'un triangle sphérique. — Théorème de Lexel.
18. Polyèdres réguliers convexes.

19. Intersection d'une droite avec une ellipse, une hyperbole, une parabole. — Tangentes à ces courbes; problèmes qui s'y rapportent.
20. Etude des sections planes d'un cône de révolution.
21. Division des polynômes.
22. Décomposition d'un trinôme du second degré en une somme ou en une différence de deux carrés. — Application à la résolution de l'équation du second degré, séparation des racines quand elles sont réelles.
23. Étude des variations de grandeur et des changements de signe de la valeur du trinôme $ax^2 + bx + c$, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$. — Applications.
24. Équation bicarrée. — Transformation des expressions de la forme $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.
25. Décomposition du trinôme $x^4 + px^2 + q$ en un produit de facteurs réels du second degré; application à la résolution de l'équation bicarrée.
26. Théorème sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs variables dont la somme est constante. — Applications.
27. — Maximum et minimum de la fraction $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.
28. Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.
29. Relations entre les angles et les côtés d'un triangle rectiligne quelconque.
30. Vitesse dans le mouvement uniforme et dans le mouvement varié. — Étude du mouvement uniformément varié.
31. Composition des mouvements. — Composition des vitesses. — Composition de deux mouvements rectilignes et uniformément variés.
32. Réduction à deux forces d'un système de forces appliquées à un corps solide. — Conditions d'équilibre.
33. Définition et détermination de la longitude et de la latitude d'un point du globe terrestre.
34. Cartes géographiques (première leçon).
35. Éclipses de lune.
36. Méthodes des rabattements. — Des changements de plan, des rotations en géométrie descriptive. — Applications.

QUESTION 106

Solution par M. Paul BOURGAREL, à Antibes.

Si A *et* A′ *sont deux polynômes de degré* n *à coefficients réels, et si* B *et* B′ *sont deux polynômes de degré moindre que* 2n, *on ne peut avoir l'identité*

$$A^3 + B = A'^3 + B' \qquad (1)$$

sans avoir les deux suivantes :

$$A = A',$$
$$B = B'.$$

(E. Amigues.)

En effet, de l'identité (1) supposée vérifiée on tire

$$(A - A')(A^2 + AA' + A'^2) = B' - B. \qquad (2)$$

Je dis que si $A - A'$ est différent de zéro, cette nouvelle identité est impossible. En effet, si l'on a

$$A = ax^n + \ldots,$$
$$A' = a'x^n + \ldots,$$

le premier terme du polynôme

$$A^2 + AA' + A'^2$$

est

$$x^{2n}(a^2 + a'^2 + aa'),$$

et le coefficient

$$a^2 + a'^2 + aa'$$

est toujours différent de zéro. Ainsi le premier membre de l'identité (2) est un polynôme dont le degré est certainement égal ou supérieur à $2n$; tandis que le second membre est un polynôme de degré inférieur à $2n$: l'identité (2) est donc impossible si l'on n'a pas

$$A - A' = 0.$$

Il en résulte évidemment

$$B - B' = 0.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Léon Clément, à Rouen; Giat, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas); Hugon, à Poligny; Taratte, élève au lycée Saint-Louis.

QUESTIONS PROPOSÉES

192. — 1° Assigner une suite régulière de n nombres triangulaires, dont la somme soit exprimée par la formule

$$S_n = \frac{n(n+1)}{3.4}[(2n+1)m^2 + (4n-1)m + 2(n-1)],$$

pour toute valeur entière de m.

Note. — On a, en particulier, pour $m = 0$, le résultat bien connu

$$S_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{2.3}$$
$$= 0 + \frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \ldots\ldots + \frac{(n-1)n}{2}.$$

On a de même, pour $m = -2$, le résultat

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$$

$$= \frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{4.5}{2} + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)}{2},$$

qui rentre dans le précédent.

Pour $m = 1$, on a

$$S_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{2.3}$$

$$= \frac{1.2}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{5.6}{2} + \frac{7.8}{2} + \ldots\ldots + \frac{(2n-1).2n}{2},$$

résultat facile à vérifier.

2° Même question pour une suite de n nombres triangulaires, dont la somme soit

$$S_n = \frac{n}{3.4}[(2n^2 + 9n + 13)m^2$$
$$+ (4n^2 + 9n - 1)m + 2(n^2 - 1)].$$

Note. — On a, en particulier, pour $m = 1$

$$S_n = \frac{n(n+1)(4n+5)}{2.3}$$

$$= \frac{2.3}{2} + \frac{4.5}{2} + \frac{6.7}{2} + \frac{8.9}{2} + \ldots + \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

Ajoutant, à cette valeur de S_n, celle qui correspond à $m = 1$ dans la question I, on trouve

$$\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{4.5}{2} + \ldots + \frac{2n(2n+1)}{2}$$
$$= \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{2.3},$$

ce qui s'accorde avec le résultat relatif à $m = -2$, dans la même question I.

3° Même question, la somme de n nombres triangulaires étant exprimée par la formule

$$S_n = \frac{n}{2.3}[(4n^2 - 1)(m^2 + m) + n^2 - 1].$$

Note. — On a pour $m = 1$,

$$S_n = \frac{n(3n^2-1)}{2} = \frac{1.2}{2} + \frac{4.5}{2} + \frac{7.8}{2} + \frac{10.11}{2} + \ldots$$
$$+ \frac{(3n-2)(3n-1)}{2}.$$

4° Même question, la somme proposée étant

$$S_n = \frac{n}{2.3}[(4n^2 - 1)m^2 + (4n^2 + 6n - 1)m + n^2 + 3n + 2].$$

Note. — On a, pour $m = 1$,

$$S_n = \frac{3n^2(n+1)}{2} = \frac{2.3}{2} + \frac{5.6}{2} + \frac{8.9}{2} + \frac{11.12}{2} + \ldots + \frac{(3n-1).3n}{2}.$$

5° Même question pour la somme

$$S_n = \frac{n}{2.3}[(4n^2 + 12n + 11)m^2 + (4n^2 + 6n - 1)m + n + 1]$$

Note. — On a pour $m = 1$,

$$S_n = \frac{3n(n+1)^2}{2} = \frac{3.4}{2} + \frac{6.7}{2} + \frac{9.10}{2} + \frac{12.13}{2} + \ldots + \frac{3n(3n+1)}{2}.$$

Ajoutant ensemble les valeurs que prend S_n, pour $m = 1$, dans les questions 3°, 4°, 5°, on obtient

$$\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{4.5}{2} + \ldots + \frac{3n(3n+1)}{2} = \frac{n(9n^2 + 9n + 2)}{2} = \frac{3n(3n+1)(3n+2)}{2.3},$$

ainsi que cela doit être. *(S. Realis.)*

ERRATUM

Page 95 (vol. précédent), ligne 8, au lieu de $(2n - 1)A_n$, lisez $(2n + 1)A_n$.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7796-6.

SUR UNE QUARTIQUE UNICURSALE

Par M. **Maurice d'Ocagne**, ingénieur des Ponts et Chaussées.

(*Suite*, voir p. 79.)

---

5. — Le centre de courbure de la courbe γ_1 répondant au point C est le point E, où CN touche son enveloppe. Nous allons déterminer ce point.

Auparavant, remarquons que les courbes (N) et (I) décrites par les points N et I sont homothétiques par rapport au point O, puisque le rapport $\frac{\text{ON}}{\text{OI}}$ est constant et égal à -4. Il en résulte que les normales à ces courbes en N et en I sont parallèles entre elles. Or, la courbe (I) est la polaire de l'hypocycloïde (C′) par rapport au point O; la normale Ii à la courbe (I) s'obtient donc en joignant le point I au point de rencontre i des perpendiculaires respectivement élevées à OI et à C′I en O et en C′. Cette droite est évidemment parallèle à CO, puisque le point I est le milieu de CC′.

Donc, *la normale en* N *à la courbe* (N) *est parallèle au rayon vecteur* OC *du point* C.

La perpendiculaire élevée par le centre de courbure E cherché à la droite CN, c'est-à-dire la normale à l'enveloppe de la droite CN, coupe la normale Nn au point n'; la perpendiculaire Oi à ON coupe Nn au point n; la normale CN à la courbe γ_1 coupe au point c la normale C′i à l'hypocycloïde (C′).

Dès lors, ε représentant toujours l'angle de contingence de l'hypocycloïde (C′), c'est-à-dire l'angle de deux positions infiniment voisines de la droite AB, qui est aussi l'angle de deux positions infiniment voisines de la droite IN, ces deux droites étant perpendiculaires, et η désignant l'angle de deux positions infiniment voisines de la droite CN, on a

$$d(\text{N}) = \text{N}n \cdot \varepsilon = \text{N}n' \cdot \eta$$
$$d(\text{C}) = \text{C}c \cdot \varepsilon = \text{CE} \cdot \eta.$$

Par suite,

$$\frac{Nn}{Nn'} = \frac{Cc}{CE}.$$

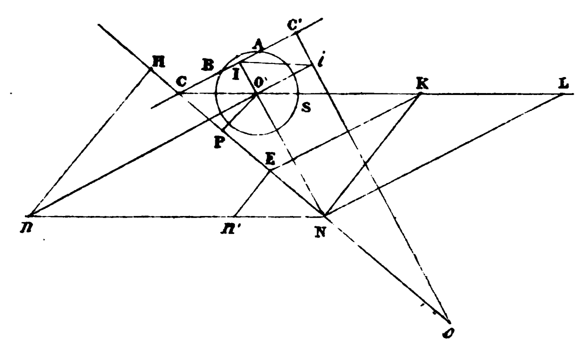
Du point n abaissons sur CN la perpendiculaire nH. Nous pourrons écrire l'égalité précédente

$$\frac{NH}{NE} = \frac{Cc}{CE},$$

ou, en changeant le signe des deux termes du premier membre,

$$\frac{HN}{EN} = \frac{Cc}{CE}.$$

Le point I étant le milieu de CC', et IN étant parallèle à C'c,



on a Cc = 2CN. De plus les triangles semblables ONn et IOC donnent nN = 4CO, ou, en projetant les segments parallèles nN et CO, en HN et CP, sur la droite CN, HN = 4CP. L'égalité précédente deviendra donc

$$\frac{2CP}{EN} = \frac{CN}{CE}.$$

De là on tire

$$\frac{CN}{CE} = \frac{CN + 2CP}{CE + EN} = \frac{CN + 2CP}{CN}.$$

En N, élevons à CN une perpendiculaire qui coupe CO en K, et prolongeons la droite CK de la longueur KL = 2.CO. Nous avons

$$\frac{CL}{CK} = \frac{CK + KL}{CK} = \frac{CK + 2CO}{CK} = \frac{CK + 2.CP}{CN}.$$

Donc,

$$\frac{CN}{CE} = \frac{CL}{CK},$$

et nous voyons que les droites LN et KE sont parallèles. Le centre de courbure E est ainsi déterminé et nous pouvons énoncer ce théorème :

Le rayon vecteur OC *du point* C *coupant au point* K *la perpendiculaire* NK *à la normale* CN, *si l'on prend sur ce vecteur le point* L *tel que* KL = 2.CO, *la droite menée par le point* K *parallèlement à la droite* NL *passe par le centre de courbure de la courbe* γ_4 *répondant au point* C.

6. — Une droite quelconque menée par le point O coupe la quartique γ_4 en quatre points dont les vecteurs sont $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$. Si ω représente l'inclinaison de la droite considérée sur la droite OS, ces quatre quantités seront les racines de l'équation (2). De cette équation on déduit que

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = \frac{27}{4} R^4$$

$$\rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_3\rho_4 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \rho_2\rho_3\rho_4 = 0$$

$$\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 + \rho_3\rho_4 = -\frac{27}{4} R^2$$

L'égalité (3) montre que *le produit des vecteurs de quatre points en ligne droite avec le pôle est constant,* remarque déjà faite par M. de Longchamps.

L'égalité (4), qui peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4} = 0 \qquad (4')$$

montre que *la somme des inverses de ces vecteurs est nulle.*

L'égalité (5) montre que *la somme des produits deux à deux de ces vecteurs est constante,* et l'égalité (5) divisée par l'égalité (3), que *la somme des inverses de ces produits, augmentée de l'inverse du carré du rayon du cercle* Δ, *est nulle.*

(*A suivre.*)



SUR UN NOUVEAU CERCLE REMARQUABLE
DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir page 85.)

ÉTUDE DE LA DROITE δ

1° *La droite δ est la polaire du centre de gravité par rapport au cercle Δ.*

En effet, l'équation de Δ étant écrite sous la forme

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + \beta\gamma(b^2 + c^2 - a^2) + \alpha\gamma(c^2 + a^2 - b^2) + \alpha\beta(a^2 + b^2 - c^2),$$

on a

$$f'_\alpha = 2a^2\alpha + \beta(a^2 + b^2 - c^2) + \gamma(c^2 + a^2 - b^2),$$
$$f'_\beta = \alpha(a^2 + b^2 - c^2) + 2b^2\beta + \gamma(c^2 + b^2 - a^2),$$
$$f'_\gamma = \alpha(c^2 + a^2 - b^2) + \beta(b^2 + c^2 - a^2) + 2c^2\gamma,$$

et, par suite,

$$f'_\alpha + f'_\beta + f'_\gamma = 4(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma).$$

La polaire d'un point $((\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ étant, comme l'on sait,

$$\alpha_0 f'_\alpha + \beta_0 f'_\beta + \gamma_0 f'_\gamma = 0,$$

celle du centre de gravité E s'obtiendra en faisant, dans cette égalité,

$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0.$$

L'équation de la polaire de E est donc

$$f'_\alpha + f'_\beta + f'_\gamma = 0.$$

En appliquant cette relation à Δ, on a

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0,$$

équation qui représente δ.

2° *La droite δ est parallèle à la droite qui joint les réciproques des points de Brocard.*

Les points de Brocard O, O' ont pour coordonnées barycentriques

$$\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}; \quad \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2};$$

et les réciproques (*) O_0, O'_0 :

$$b^2, c^2, a^2; \; c^2, a^2, b^2.$$

La droite $O_0O'_0$ a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\alpha(b^2c^2 - a^4) + \beta(a^2c^2 - b^4) + \gamma(b^2a^2 - c^4) = 0.$$

L'équation de δ étant

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0,$$

les droites δ et $O_0O'_0$ seront parallèles si l'on a (**)

$$\begin{vmatrix} b^2c^2 - a^4 & a^2c^2 - b^4 & b^2a^2 - c^4 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

condition visiblement vérifiée.

On peut observer, mais ceci ne se rattache pas assez intimement à l'étude que nous faisons ici pour que nous y insistions autrement, que *la droite* $O_0O'_0$ *est, par rapport à* ABC, *la transversale réciproque de la droite* G, *axe d'homologie de* ABC *et du triangle de Brocard* $A_1B_1C_1$ (***).

3° *Si l'on considère les tangentes menées au cercle circonscrit par les sommets du triangle* ABC, *ces droites, comme l'on sait, rencontrent les côtés opposés en trois points situés sur une certaine droite* δ^{-1}; *la droite* δ *est relativement à* ABC *la transversale réciproque de* δ^{-1}.

(*) Les coordonnées barycentriques de deux points réciproques (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$ vérifient les égalités (*Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885, p. 63.)

$$\alpha'\alpha'' = \beta'\beta'' = \gamma'\gamma''.$$

Pour représenter deux points réciproques nous proposons de les désigner par M et M_0.

(**) Il faut observer que dans le système des coordonnées barycentriques la droite de l'infini est représentée par

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

(***) Les notations que nous employons ici sont celles qui correspondent à la figure connue. (V. *Journal*, 1885, p. 13.)

En effet l'équation de la tangente menée par A au cercle circonscrit est

$$\frac{\beta}{b^2} + \frac{\gamma}{c^2} = 0,$$

Cette droite et les deux autres droites analogues coupent les côtés de ABC en trois points qui sont situés sur une droite δ^{-1} ayant pour équation

$$\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta}{b^2} + \frac{\gamma}{c^2} = 0.$$

Ainsi les droites δ et δ^{-1} rencontrent les côtés de ABC en des points qui sont deux à deux isotomiques; ces droites sont donc deux transversales réciproques.

J'ai précédemment (*) indiqué que δ^{-1} était l'axe radical du cercle de Brocard et du cercle circonscrit; d'après cela, on peut dire que *les axes radicaux du cercle circonscrit au triangle* ABC 1° *avec le cercle de Brocard*, 2° *avec le cercle* Δ, *sont deux transversales réciproques, par rapport à* ABC.

La droite δ^{-1} dont il est ici question est une de ces droites remarquables qui appartiennent à la géométrie du triangle; elle représente la polaire du point de Lemoine par rapport au cercle circonscrit, et M. Neuberg a proposé de la nommer *droite de Lemoine*. Ainsi, *la droite* δ *est la transversale réciproque de la droite de Lemoine.*

4° *La droite* δ *passe par le réciproque du point de Steiner.*

Le point de Steiner R (**) a des coordonnées barycentriques (α_0, β_0, γ_0) vérifiant les égalités

$$\alpha_0(b^2 - c^2) = \beta_0(c^2 - a^2) = \gamma_0(a^2 - b^2);$$

le réciproque R_0 a donc des coordonnées (α_1, β_1, γ_1) telles que

$$\frac{\alpha_1}{b^2 - c^2} = \frac{\beta_1}{c^2 - a^2} = \frac{\gamma_1}{a^2 - b^2},$$

et l'on a bien

$$a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2) \equiv 0.$$

(*) Voyez *Journal de Mathématiques spéciales*, 1885, p. 127 : *Sur l'hyperbole des neuf points*, par M. H. Brocard.

(**) Voyez *Journal* 1886, p. 7 : (*Sur le point de Steiner*, par J. Neuberg). Le point de Steiner est représenté par la lettre R sur la figure citée.

En appliquant cette propriété, il faut observer que la relation

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0,$$

prouve que R_0 est à l'infini, dans la direction de δ. On peut déduire de là une construction du point de Steiner, mais celle que nous indiquons plus loin est plus rapide et plus élégante.

5° *La droite* δ *est harmoniquement associée au point* D, *centre d'homologie du triangle* ABC *et du triangle de Brocard* $A_1B_1C_1$.

Si l'on joint un point M aux trois sommets d'un triangle ABC, ces droites rencontrent les côtés opposés en des points M_a, M_b, M_c; si l'on prend les points μ_a, μ_b, μ_c conjugués harmoniques de ceux-ci par rapport aux côtés du triangle, ces points sont situés sur une droite Δ_M et nous dirons que M et Δ_M sont harmoniquement associés (*).

Si α_0, β_0, γ_0 désignent les coordonnées d'un point M, l'équation de la droite harmoniquement associée à ce point est, évidemment,

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} + \frac{\beta}{\beta_0} + \frac{\gamma}{\gamma_0} = 0.$$

Cela posé, les coordonnées du point A_1 sont, comme on sait,

$$a^2, \qquad c^2, \qquad b^2;$$

la droite AA_1 a donc pour équation

$$\frac{\beta}{c^2} = \frac{\gamma}{b^2},$$

et cette droite passe évidemment par le point

$$\alpha = 0, \qquad \beta b^2 = \gamma c^2.$$

Imaginons donc le point dont les coordonnées α', β', γ' vérifient les égalités

$$a^2\alpha' = b^2\beta' = c^2\gamma',$$

les droites AA_1, BB_1, CC_1, concourent en ce point qui est, tout à la fois, la réciproque du point de Lemoine et aussi le centre d'homologie des triangles ABC et $A_1B_1C_1$.

6° *Les points* θ, θ' *communs au cercle circonscrit et à la droite* δ *sont deux points réciproques.*

(*) L'expression que nous adoptons ici nous paraît préférable à celles de *pôle trilinéaire* et de *polaire trilinéaire* qu'avait proposées autrefois M. Mathieu (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 399) et que M. Neuberg a reprises (*Journal* 1886, p. 8).

En effet, leurs coordonnées vérifient les égalités

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0,$$
$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0.$$

Pour reconnaître l'exactitude de la proposition énoncée il suffit de constater que ces équations s'échangent, mutuellement, en y remplaçant α, β, γ, respectivement par $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$.

Ainsi δ est dans la transformation par points réciproques la droite qui correspond au cercle circonscrit.

7° *Les points θ, θ' sont les points communs au cercle circonscrit et à un cercle décrit de l'orthocentre comme centre avec un rayon égal au diamètre du cercle circonscrit.*

Si par les sommets de ABC on mène des parallèles aux côtés opposés, on forme un triangle A″B″C″; soit ζ'' le cercle circonscrit à ce triangle.

La puissance de A par rapport à ζ'' est égale à AB″ . AC″; elle est donc égale à $-a^2$. D'après cette remarque, l'équation générale des cercles étant, comme nous l'avons expliqué précédemment

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

l'équation de ζ'' s'obtient immédiatement en supposant

$$u = -a^2, \quad v = -b^2, \quad w = -c^2;$$

ce qui donne

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) + a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0.$$

L'axe radical de ζ'' et du cercle ζ circonscrit à ABC correspond donc à l'équation

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0,$$

équation qui représente δ.

De cette observation résulte une détermination élégante des points remarquables θ, θ'; on les obtient en construisant le cercle ζ circonscrit au triangle ABC et un second cercle ayant pour centre le point de concours des hauteurs et pour rayon le diamètre du cercle ζ.

On connaît le centre de ζ''; les points θ et θ' étant déterminés, comme nous venons de le dire, on déduit de là une construction très simple de ce cercle. *(A suivre.)*

ÉTUDE DES POINTS A L'INFINI

DANS L'INTERSECTION DE DEUX CONIQUES

Par M. **Papelier**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Orléans.

Étant données les coordonnées homogènes d'un point d'un plan x, y, z, si $z = 0$, on dit que ce point est à l'infini dans la direction dont les paramètres sont x et y.

Je me propose, dans cette étude, de déterminer dans quel cas deux coniques ont des points communs à l'infini.

Soient les équations de deux coniques

$$f(xyz) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0 \quad (1)$$

$$f_1(xyz) = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2Dxz + 2E_1yz + F_1z^2 = 0 \quad (2)$$

J'élimine y entre ces deux équations, en supposant C et $C_1 \neq 0$, ce qu'on peut toujours admettre, j'obtiens un résultant

$$R(x.z) = N^2 - MP = 0; \quad (3)$$

en posant :

$$N = C(A_1x^2 + 2D_1xz + F_1z^2) - C_1(Ax^2 + 2Dxz + Fz^2),$$

$$M = 2[C(B_1x + E_1z) - C_1(Bx + Ez)],$$

$$P = 2[(Bx + Ez)(A_1x^2 + 2D_1xz + F_1z^2) - (B_1x + E_1z)(Ax^2 + 2Dxz + Fz^2)].$$

Soit x_0z_0 une solution de l'équation (3); si, pour cette solution, $M \neq 0$ les équations (1) et (2) ont une solution commune, et une seule,

$$y = -\frac{N}{M}.$$

Si, au contraire, $M = 0$, alors on a aussi $N = 0$ $P = 0$, les équations (1) et (2) ont deux racines communes en y, et on sait que ce cas ne peut se présenter que si x_0z_0 est au moins une racine double de l'équation (3).

Dans tous les cas si y_0 est une solution commune aux deux équations (1) et (2), le point $x_0y_0z_0$ est un point commun aux deux courbes, et on démontre sans peine que les deux coniques ont toujours quatre points communs distincts ou confondus.

Pour que l'un de ces points s'éloigne à l'infini il faudra que $z_0 = 0$, cela revient à dire que le résultant $R(x, z)$ devra contenir z en facteur.

Nous allons chercher à quelles conditions géométriques doivent satisfaire les deux coniques pour qu'il en soit ainsi.

I. — *Les deux coniques n'ont qu'un seul point commun à l'infini.*

Il faut et il suffit que le coefficient de x^4 dans $R(x, z)$ soit nul ou que l'on ait

$$(CA_1 - AC_1)^2 - 4(CB_1 - BC_1)(BA_1 - AB_1) = 0.$$

Cette condition exprime que les deux coniques ont une direction asymptotique commune.

M est ici différent de o: car si $M = 0$, on a $CB_1 - BC_1 = 0$ et il est facile de voir que dans ce cas le résultant contient z^2 en facteur.

Cette direction est nécessairement réelle; son coefficient angulaire est

$$\frac{y}{x} = -\frac{CA_1 - AC_1}{CB_1 - BC_1}.$$

Les deux coniques ne peuvent être que :

Deux hyperboles ayant une asymptote parallèle.

Ou une hyperbole et une parabole, l'axe de la parabole étant parallèle à une asymptote de l'hyperbole.

Le point commun à l'infini est dans la direction de la direction asymptotique commune.

II. — *Les deux coniques ont deux points communs à l'infini.*

D'après ce qui précède nos deux coniques doivent avoir déjà une direction asymptotique commune.

1° Je suppose d'abord qu'elles n'aient qu'une seule direction asymptotique commune; cette direction est alors réelle; je prends l'axe des x parallèle à cette direction: cela revient à faire $A = 0$, $A_1 = 0$; le résultant s'abaisse au troisième degré en x, et j'écris que le coefficient de x^3z est nul; j'obtiens

$$(CB_1 - BC_1)(BD_1 - B_1D) = 0.$$

Or $CB_1 - BC_1 \neq 0$, puisque je suppose qu'il n'y a qu'une seule direction asymptotique commune; il reste

$$BD_1 - B_1D = 0.$$

Je dis que B et B_1 sont $\neq$ o; en effet, si $B = o$, on doit avoir: soit $B_1 = o$, et alors les deux directions asymptotiques sont communes; soit $D = o$, et alors la conique (1) se compose de deux droites parallèles (hypothèse que j'écarte); ma condition peut alors s'écrire

$$\frac{D}{B} = \frac{D_1}{B_1}.$$

Mes deux coniques sont deux hyperboles et l'asymptote parallèle à l'axe des x est la même.

Ainsi, dans ce cas, nous avons un point double à l'infini dans la direction de l'asymptote commune.

2° Si maintenant mes deux coniques ont mêmes directions asymptotiques, le résultant est encore du deuxième degré en x; on a deux points distincts à l'infini dans les directions asymptotiques.

En résumé, pour que l'intersection de deux coniques présente deux points à l'infini, il faut que ces deux coniques soient :

Deux hyperboles ayant une asymptote commune,

Ou deux hyperboles ayant les asymptotes parallèles,

Ou encore deux paraboles d'axes parallèles,

Ou enfin deux ellipses homothétiques.

III. — *Les deux coniques ont trois points communs à l'infini.*

1° Je suppose encore comme précédemment que les deux coniques n'aient qu'une seule direction asymptotique commune, alors elles doivent déjà avoir une asymptote commune; je prends cette asymptote pour axe des x, cela revient à faire $A = A_1 = D = D_1 = o$.

J'écris que le coefficient de x^2z^2 est nul dans $R(x, z)$ et j'obtiens

$$(CB_1 - C_1B)(BF_1 - B_1F) = o,$$

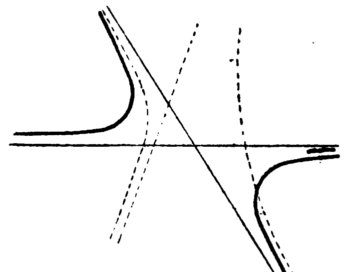
ou comme

$$CB_1 - C_1B \neq o,$$
$$BF_1 - B_1F = o,$$
$$\frac{F}{B} = \frac{F_1}{B_1}.$$

Faisons $B = B_1$, il vient alors $F = F_1$, les équations des deux coniques deviennent

$$Cy^2 + 2Bxy + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$C_1y^2 + 2Bxy + 2E_1yz + F_1z^2 = 0\,;$$

elles ont un point triple à l'infini dans la direction de l'asymptote commune; on dit que cette droite est une asymptote d'*osculation*.



Si x et x_1 désignent les abscisses d'un point de chaque courbe

$$x - x_1 = -\frac{E - E_1}{B_1}z - \frac{C - C_1}{B}y,$$

pour des valeurs suffisamment petites de y, $x - x_1$ a un signe constant, celui de $\frac{-E + E_1}{B_1}$, ce qui indique la position des deux courbes par rapport à l'asymptote commune.

On remarquera aussi que le produit des longueurs géométriques des deux axes est le même pour les deux courbes ; ce qui peut servir à caractériser l'osculation à l'infini.

2° Supposons maintenant que les deux coniques aient mêmes directions asymptotiques ; alors je puis supposer $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, le résultant se réduit au 2e degré de x et j'écris que le coefficient de x^2z^2 est nul.

$$C(D - D_1)^2 + 2B(E_1 - E)(D_1 - D) + A(E_1 - E)^2 = 0.$$

Pour interpréter aisément cette condition, je remarque que les deux courbes ayant mêmes directions asymptotiques sont du même genre; et je suppose trois cas.

a. — Les deux coniques sont deux hyperboles.

Je puis supposer $A = 0$, ma condition devient

$$(D - D_1)[C(D - D_1) - 2B(E - E_1)] = 0,$$

ce qui donne l'une des deux conditions

$$D - D_1 = 0,$$

ou

$$2B(E - E_1) = C(D - D_1).$$

La première exprime que l'asymptote parallèle à Ox est la même dans les deux hyperboles; la deuxième, que l'asymptote non parallèle à Ox est la même.

Dans ce cas on a un point double à l'infini dans la direction de l'asymptote commune et un point simple dans l'autre direction asymptotique.

b. — Les deux courbes sont deux paraboles.

Je peux supposer $A = 0$, $B = 0$: la condition se réduit à

$$D - D_1 = 0.$$

Les deux courbes ont alors pour équation

$$Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + F^2 = 0,$$
$$Cy^2 + 2Dxz + 2E_1yz + F_1z^2 = 0.$$

Cela montre que les deux paraboles sont égales, ont leurs axes parallèles, et tournent leur concavité dans le même sens; elles ont un point triple à l'infini dans la direction de l'axe.

c. — Les deux courbes sont deux ellipses.

La condition

$$C(D_1 - D)^2 + 2B(E_1 - E)(D_1 - D) + A(E - E_1)^2 = 0$$

ne peut être vérifiée que par

$$E = E_1,$$
$$D = D_1;$$

mais dans ce cas le coefficient de xz^3 s'annule dans $R(x, z)$.

En résumé, pour que deux coniques aient trois points communs à l'infini, il faut qu'elles soient suivant les cas :

Deux hyperboles ayant une asymptote commune d'osculation;

Deux hyperboles ayant une asymptote commune et l'autre direction asymptotique commune;

Deux paraboles égales, d'axes parallèles, tournant leur convexité dans le même sens.

IV. — *Les deux coniques ont quatre points communs à l'infini.*

1° Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une seule direction asymptotique commune, alors les deux hyperboles auront une asymptote d'osculation, nous pouvons supposer $A = A_1 = 0$, $B = B_1$, $F = F_1$, les équations deviennent

$$Cy^2 + 2Bxy + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$C_1y^2 + 2Bxy + 2E_1yz + Fz^2 = 0.$$

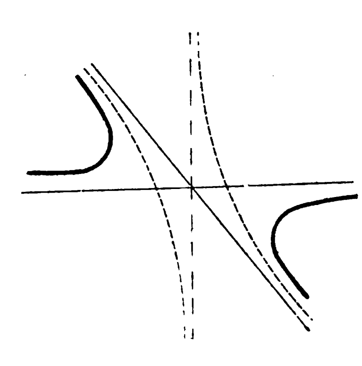
J'écris que le coefficient de x^2z^3 est nul. J'obtiens alors

$$4BF(C - C_1)(E - E_1) = 0.$$

et comme $BF(C - C_1) \neq 0$,
il reste $E - E_1 = 0$,
nos deux courbes deviennent

$$Cy^2 + 2Bxy + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$C_1y^2 + 2Bxy + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$

elles ont un point quadruple à l'infini dans la direction de l'asymptote commune. L'asymptote est dite de surosculation. Les deux courbes ont même sens, et le produit des longueurs géométriques des axes est le même; ces deux propriétés caractérisent la surosculation à l'infini.



2° Supposons que les 2 directions asymptotes soient les mêmes :

$$A = A_1, \quad B = B_1, \quad C = C_1.$$

a. — Les deux courbes sont deux hyperboles.

Elles auront alors une asymptote commune, je la prends pour axe des x, et les équations peuvent s'écrire :

$$Cy^2 + 2Bxy + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$Cy^2 + 2Bxy + 2E_1yz + F_1z^2 = 0.$$

J'écris que le coefficient de xz^3 est nul, j'obtiens

$$(E - E_1)(F - F_1) = 0;$$

d'où $E - E_1 = 0$: la deuxième asymptote est commune.
$F - F_1 = 0$: l'axe de x est asymptote d'osculation.

b. — Les deux courbes sont deux paraboles.

Les équations s'écrivent :

$$Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$Cy^2 + 2Dxz + 2E_1yz + F_1z^2 = 0;$$

on trouve en écrivant que le coefficient de xz^3 est nul :

$$E - E_1 = 0.$$

Les deux paraboles ont même axe, tout en satisfaisant aux conditions précédentes (III, 2° *b*).

c. — Les deux courbes sont deux ellipses.

On doit avoir $E = E_1$ $D = D_1$, elles sont homothétiques et concentriques.

En résumé pour que deux coniques aient quatre points communs à l'infini il faut qu'elles soient :

Deux hyperboles ayant une asymptote de surosculation;

Deux hyperboles ayant une asymptote d'osculation et l'autre direction asymptotique commune;

Deux hyperboles ayant les asymptotes communes;

Deux paraboles égales, ayant même axe et la concavité dans le même sens;

Deux ellipses homothétiques et concentriques.

QUESTIONS D'EXAMENS

5. — *Déterminer l'asymptote de la courbe représentée par l'équation*

$$\rho = \frac{\sin \omega}{e^{\omega^2} - 1}$$

Pour $\omega = 0$, ρ prend la forme $\frac{0}{0}$.

Mais il est facile de voir que ρ est infini pour $\omega = 0$.

En effet, on a $$\sin \omega = \frac{\omega}{1} - \frac{\omega^3}{6} + \ldots$$

et $$e^{\omega^2} = 1 + \frac{\omega^2}{1} + \frac{\omega^4}{1.2} + \ldots$$

On a donc $$\rho = \frac{1 - \frac{\omega^2}{6} + \ldots}{\frac{\omega}{1} + \frac{\omega^3}{1.2} + \ldots}$$

et l'on voit bien que ρ croît indéfiniment quand ω tend vers zéro.

Pour déterminer l'asymptote on observe que

$$\rho \sin \omega = \frac{\sin \omega}{\omega} \frac{1 - \frac{\omega^2}{6} \ldots}{1 + \frac{\omega^2}{2} \ldots},$$

on a donc $$\lim \rho \sin \omega = 1.$$

L'asymptote a pour équation $y = 1$.

6*. — *Reconnaître que l'équation*

$$x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz(x + y + z) = 1,$$

représente une surface de révolution.

On peut observer que l'équation précédente peut s'écrire

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(xy + xz + yz)^2 = 1$$

et l'on sait que toute équation de la forme

$$f(x^2 + y^2 + z^2, \quad xy + xz + yz) = 0.$$

représente une surface de révolution (*C. M. S.*, t. III, p. 117).

SUR LA QUESTION 75

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION

Il s'agit de démontrer que *le nombre entier*

$$\frac{(\sqrt{2} + 1)^{2n-1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$$

est la somme de deux carrés entiers.

Cette question a été également proposée par M. Catalan dans les *Nouvelles Annales* (*) et dans *Mathesis* (**). Elle est susceptible d'une généralisation intéressante qui a été signalée par M. Catalan lui-même, et qui fait l'objet de la question 290 proposée dans *Mathesis* et résolue dans ce recueil (1886, p. 65). Nous ferons connaître ici cette généralisation qui entraîne la solution immédiate de la question proposée.

Considérons l'équation

$$x^2 - 2ax - b^2 = 0$$

dont les racines α, β, sont données par les formules

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \beta = a - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Posons

$$V_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta};$$

nous en déduisons

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques;* question 1453, résolue t. II, 1883, à la page 476.

(**) *Mathesis*, question 250, résolue t. VI, 1886, p. 62.

$$(V_n)^2(\alpha - \beta)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n, \qquad (1)$$

et

$$(V_{n-1})^2(\alpha - \beta)^2 = \alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2} - 2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}. \qquad (2)$$

D'ailleurs, nous avons

$$\alpha\beta = -b^2$$

et, par suite,

$$\alpha^n\beta^n = (-1)^n b^{2n}, \qquad \alpha^{n-1}\beta^{n-1} = (-1)^{n-1}b^{2n-2}.$$

Ces égalités donnent

$$\alpha^n\beta^n + b^2\alpha^{n-1}\beta^{n-1} = b^{2n}[(-1)^n + (-1)^{n-1}],$$

ou

$$\alpha^n\beta^n + b^2\alpha^{n-1}\beta^{n-1} = 0.$$

Cette remarque étant faite, multiplions les deux membres de (2) par b^2 et ajoutons ensuite cette égalité avec (1); il vient

$$(\alpha^n - \beta^n)^2 + b^2(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2 = \alpha^{2n-1}\left(\alpha + \frac{b^2}{\alpha}\right) + \beta^{2n-1}\left(\beta + \frac{b^2}{\beta}\right).$$

D'autre part, nous avons aussi

$$\alpha + \frac{b^2}{\beta} = 0, \quad \beta + \frac{b^2}{\alpha} = 0,$$

et, par suite,

$$\alpha + \frac{b^2}{\alpha} = -\left(\beta + \frac{b^2}{\beta}\right) = 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nous obtenons ainsi l'identité

$$(\alpha^n - \beta^n)^2 + b^2(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2 = (\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1})\, 2\sqrt{a^2 + b^2},$$

dans laquelle on remplacera : α, par $a + \sqrt{a^2 + b^2}$; β, par $a - \sqrt{a^2 + b^2}$.

En observant que

$$\alpha - \beta = 2\sqrt{a^2 + b^2},$$

nous avons, finalement,

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 + b^2\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right)^2 = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha - \beta},$$

ou

$$\text{(A)} \qquad (V_n)^2 + (bV_{n-1})^2 = V_{2n-1}.$$

D'ailleurs, les fonctions V_n vérifient la relation de récurrence évidente

$$V_n = 2aV_{n-1} + b^2V_{n-2}$$

avec les conditions initiales

$$V_0 = 0, \quad V_1 = 1.$$

Ainsi V_2 est un nombre entier, si nous supposons, bien entendu, que a et b désignent des nombres entiers. Nous voyons alors que V_3, V_4, ... sont des nombres entiers et la formule (A) prouve que *la fonction* V_{2n-1} *est toujours la somme de deux carrés.*

Ce théorème général comprend, comme cas particulier, la démonstration du théorème proposé par M. Catalan. En supposant $a = 1$, $b^2 = 1$, nous avons

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad -\beta = \sqrt{2} - 1, \quad \alpha - \beta = 2\sqrt{2}$$

et, par conséquent,

$$V_{2n-1} = \frac{(1 + \sqrt{2})^{2n-1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}.$$

La formule (A) prouve bien que V_{2n-1} est une somme de deux carrés. (*).

G. L.

QUESTION 100

Solution par M. J. T..., élève de Mathématiques spéciales.

On donne une circonférence fixe dont le centre est C *et un point* O *dans son plan. Par le point* O *on mène une tangente* OA *au cercle* C. *Par un point* B *pris sur cette droite* OA *on mène une perpendiculaire à* OA *et une parallèle* BD *à la droite* OC, D *désignant l'un des points où cette parallèle rencontre le cercle* C. *Enfin du point* O *comme centre, avec* OD *pour rayon, on décrit une circonférence qui coupe en* M *et* M' *la perpendiculaire élevée à* OA *en* B. *On demande d'étudier le lieu des points* M *et* M' *quand le point* B *se déplace sur la tangente* OA.

Je prends pour axe des x la tangente OA et pour axe des y la perpendiculaire en O à cette droite. Soient c, a les coordonnées du point C, l'équation du cercle qui a ce point

(*) Nous avons reçu une solution de la question 75 de M. Navel, maître répétiteur à Bar-le-Duc; solution analogue à celle qui a été publiée dans les *Nouvelles annales* et une autre solution présentant des développements intéressants de M. Jean-Baptiste Marsano, professeur à Gênes.

pour centre est

$$(x - a)^2 + (y - c)^2 = c^2.$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées d'un point D de ce cercle; pour avoir le lieu, j'ai à éliminer x_1, y_1 entre les équations

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - c)^2 = c^2, \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2, \qquad (2)$$

$$y - y_1 = \frac{c}{a}(x - x_1). \qquad (3)$$

Je puis remplacer la seconde équation par une autre, obtenue en retranchant (1) de (2); ceci donne

$$2ax_1 + 2cy_1 = a^2 + x^2 + y^2. \qquad (4)$$

Tirant x_1 et y_1 des équations (3) et (4) et portant dans (1), j'ai, après simplifications,

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4c^2y^2,$$

ou

$$x^2 + (y \pm c)^2 = a^2 + c^2$$

Le lieu se compose donc de deux cercles, ayant OC pour rayon et pour centres deux points ω et ω' situés sur l'axe des y à des distances de l'origine égales à c.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Marchis, élève au lycée de Rouen ; Giat, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas) ; E. Fesquet, élève au lycée de Nîmes ; Ferval, au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay) ; Paul Bourgarel, à Antibes.

Cette question est proposée en exercice dans le *Manuel des candidats à l'École Polytechnique*, de M. Catalan (p. 369); elle se résout aussi très simplement par des considérations géométriques. G. L.

QUESTION 135

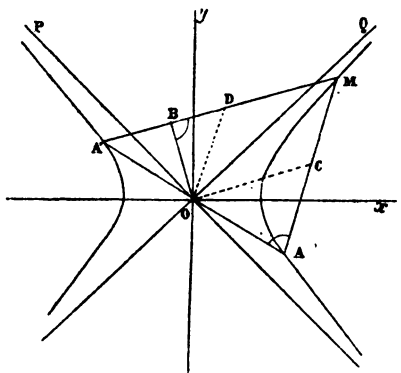
Solution par M. F. Michel, élève de Mathématiques spéciales, au Lycée de Montpellier.

Si l'on joint un point M *quelconque d'une hyperbole équilatère aux deux extrémités* A *et* A' *d'un diamètre, les cordes conjuguées à ce diamètre sont des antiparallèles de* AA' *dans le triangle* AMA'.

(Em. Lemoine.)

Soit OB le diamètre conjugué de AA'. Il suffit de démontrer l'égalité des angles MBO, MAO.

Les cordes supplémentaires MA, MA' sont parallèles à deux diamètres conjugués OC, OD; le quadrilatère DOCM est un parallélogramme; par suite les angles A'DO et OCA sont égaux.



D'autre part, dans une hyperbole équilatère, les asymptotes sont les bissectrices des angles de deux diamètres conjugués; on a donc les égalités suivantes:

$$\widehat{BOQ} = \widehat{QOA},$$
$$\widehat{DOQ} = \widehat{QOC}.$$

En retranchant, membre à membre, il vient

$$\widehat{DOB} = \widehat{COA}.$$

Les triangles BDO et OCA ont donc deux angles égaux; les troisièmes le sont aussi, et l'on a

$$\widehat{MBO} = \widehat{MAO} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Solutions analogues par MM. Caronnet, élève de mathématiques spéciales au collège Chaptal; Léon Clément et Lucien Marchis au lycée de Rouen. Solutions analytiques par MM. Giat, élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas); Henri Ferval, élève au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

QUESTION 136

Solution par M. Hugon, à Poligny.

Enveloppe des coniques qui ont un diamètre AA' = 2a, *donné en grandeur et en position, et le conjugué, donné en grandeur seulement.* (Em. Lemoine.)

Soit OB une position du diamètre conjugué à AA' et soit OB = *b*.

Si l'on rapportait la conique à ces deux diamètres, son équation serait

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

Faisons une transformation de coordonnées, de manière à amener l'axe OY dans la position oy perpendiculaire à AB.

En désignant par θ l'angle variable des deux diamètres OA et OB, il faut remplacer, dans l'équation (1) : X par $x - y$; $\cot \theta$ et Y, par $\frac{y}{\sin \theta}$, ce qui donne

$$\frac{(x - y \cot \theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \theta} - 1 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{(x - y \cot \theta)^2}{a^2} + \frac{y^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{b^2 \sin^2 \theta} - 1 = 0,$$

ou encore

$$\frac{(x - y \cot \theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \cot^2 \theta + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Développons et ordonnons par rapport à $\cot \theta$:

$$y^2 \cot^2 \theta\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{2xy \cot \theta}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe, il suffit d'exprimer que cette équation a une racine double en $\cot \theta$, ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^4} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Le lieu est une ellipse de centre O, et dont les axes coïncident avec les axes de coordonnées; leurs longueurs sont $\sqrt{a^2 + b^2}$ et b.

Ont résolu la même question : MM. Léon Clément, au lycée de Rouen; Valabrègue, au lycée de Montpellier; Lucien Marchis, au lycée de Rouen; Taratte, au lycée Saint-Louis; P. Fabre, au lycée Henri IV; Voignier, au lycée de Nancy; Giat, au lycée Saint-Louis.

QUESTION 146

Solution par M. Amaury DE KERDREL, à Brest.

On considère la courbe Γ *qui correspond à l'équation*

$$ay^2 = x^3.$$

Ayant pris sur l'axe de cette courbe un point P, *sur* OP *comme diamètre (*O *étant le point de rebroussement), on décrit un cercle* Δ

qui rencontre Γ *en un point* M ; *la tangente à* Γ *en ce point* M *rencontre* Δ *en* I. *Vérifier que le lieu décrit par ce point* I *est la courbe unicursale qui correspond aux formules*

$$\frac{x}{a} = \frac{t^4}{4 + 9t^2} \quad et \quad -\frac{y}{a} = \frac{t^3(2 + 3t^2)}{4 + 9t^2}.$$

Soient $x_0 y_0$ les coordonnées du point I; xy les coordonnées du point M. Les coordonnées de ce point vérifient:

1° L'équation de la tangente au point M à Γ qui est:

$$2ayy_0 - 3x_0^3 x + x_0^2 = 0 \qquad (1)$$

et 2°

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0, \qquad (2)$$

(2α étant l'abscisse du point P).

Mais $x_0 y_0$ satisfont aux équations :

$$ay_0^2 = x_0^3, \qquad (3)$$

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 = 0. \qquad (4)$$

Soit
$$\frac{y_0}{x_0} = t,$$

on aura
$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{x_0^2}{ay_0}$$

et
$$t^3 = \frac{x_0^3}{ay_0}.$$

Mais

$$y_0 = at^3, \quad x_0 = at^2;$$

en vertu de ces relations l'équation (1) devient

$$2y - 3tx + at^3 = 0. \qquad (1)'$$

Éliminons d'autre part α entre les équations (2) et (4); nous aurons

$$x_0(x^2 + y^2) \cdot x(x_0^2 + y_0^2) = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - ax(t^2 + t^4) = 0. \qquad (\Delta)$$

Nous sommes donc ramenés à chercher le second point d'intersection du cercle Δ avec la droite (1'); le premier point étant M. Résolvons ces deux équations par rapport à x, nous avons

$$4x^2 + (3tx - at^3)^2 - 4ax(t^2 + t^4) = 0$$

ou

$$(4 + 9t^2)x^2 - (10at^4 + 4at^2)x + a^2t^6 = 0.$$

On a donc

$$xx_0 = \frac{a^2t^6}{4 + 9t^2},$$

d'où

$$\frac{x}{a} = \frac{t^4}{4 + 9t^2},$$

et, par suite,

$$-\frac{y}{a} = \frac{t^3(2 + 3t^2)}{4 + 9t^2}.$$

A ces équations correspond une unicursale ayant la forme d'une branche parabolique doublement infléchie; l'axe ox est, pour des raisons évidentes, un axe de symétrie de cette courbe.

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Henri Ferval, élève au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay) ; Taratte, élève au lycée Saint-Louis; Hugon, à Poligny; Giat, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas).

QUESTIONS PROPOSÉES

193. — On considère l'hyperbole H

$$xy - 2\beta x - 2\alpha y + 2\alpha\beta = 0, \quad \text{(Axes rect.)}$$

et l'on demande :

1° Le lieu des centres des coniques ζ qui touchent les axes ox, oy et qui, en outre, sont doublement tangentes à H.

Ce lieu se compose d'une droite Δ et d'une hyperbole équilatère K.

2° Soient U les coniques du réseau ζ qui ont leur centre sur K. Trouver le lieu des projections de O sur la droite qui, pour une conique U, joint ses points de contact avec les axes; et aussi le lieu des projections de O sur les cordes de contact de U avec H.

3° On propose enfin ces deux dernières questions pour les coniques V du réseau ζ qui ont leurs centres sur Δ.

(G. L.)

194. — On considère une ellipse Γ; soient F l'un de ses foyers, Δ la directrice correspondante, C le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur Δ; par un point I on mène à Γ deux tangentes qui rencontrent Δ aux points A et B.

1° Trouver le lieu du point I sachant que C est le milieu de AB :

Ce lieu est la perpendiculaire élevée à FC, au point F;

2° Trouver le lieu du point I sachant que AFB est un angle droit :

Ce lieu est une conique φ, ayant pour foyer F, pour directrice Δ, et dont l'excentricité est égale à $e\sqrt{2}$, e désignant celle de Γ;

3° Trouver l'enveloppe de φ, quand on suppose que les ellipses Γ sont variables, mais restent homofocales :

Cette enveloppe est un cercle;

4° Trouver l'enveloppe des coniques φ, quand on suppose que les ellipses Γ varient, mais en conservant sur FC les mêmes sommets.

Ce lieu est une quartique unicursale; on indiquera les trois points doubles de cette courbe. *(G. L.)*

ERRATA

Pages 51 et 52. — *Lire* ellipse E *au lieu de* ellipse ε.

Page 52, lignes 18 et 19. — *Lire* tel que les perpendiculaires menées sur les droites NA_1, NA_2, NA_3 par les points A_1, A_2, A_3 ou A_3, A_1, A_2 ou A_2, A_3, A_1 concourent, etc.

Page 75, lignes 18, 19, 20. — Cette conclusion suppose la relation $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}\operatorname{cotg}\alpha$, tandis qu'on a $\operatorname{tg}\varphi = 3\operatorname{tg}\alpha$. Donc les triangles isoscèles correspondants au point en question ont une hauteur triple de celle des triangles $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$, $B_3A_1A_2$.

Page 79, ligne 17. — *Lire* prolongeant *au lieu de* partageant.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9462-6.

SUR UNE QUARTIQUE UNICURSALE

Par M. **Maurice d'Ocagne**, ingénieur des Ponts et Chaussées.

(*Fin*, voir p. 97.)

---

7. — Reprenons la formule (3). Si l'on se reporte à la première transformation générale étudiée dans mon Mémoire *sur les transformations centrales des courbes planes* (*), transformation que j'ai appelée *l'inversion généralisée*, on voit que *la quartique γ_4 est anallagmatique par rapport à son point central pour l'inversion d'indice 4.*

En vertu de la formule (8) du Mémoire en question, on voit que *la somme des cotangentes des angles sous lesquels une droite issue de O coupe la quartique γ_4, est nulle.*

Or, dans un intéressant Mémoire publié récemment (**) et intitulé : *Application géométrique d'un théorème de Jacobi*, M. G. Humbert a obtenu comme conséquence de son remarquable théorème I, cette proposition : *La somme des cotangentes des angles d'intersection d'une droite et d'une courbe algébrique reste fixe, quand la droite se déplace parallèlement à elle-même.*

Ce théorème, rapproché du précédent, donne celui-ci qui constitue une curieuse propriété de la courbe γ_4 :

La somme des cotangentes des angles sous lesquels la quartique γ_4 est coupée par une droite quelconque est nulle.

De là, ce corollaire :

Si deux des angles d'intersection d'une droite et de la quartique γ_4 sont supplémentaires, il en est de même des deux autres.

Ce corollaire n'est plus applicable lorsque l'un des couples d'angles comprend un angle nul et l'autre égal à π, c'est-à-

---

(*) *Mathésis*, t. V, 1884, p. 73 et 97. — J'ai déjà eu l'occasion de citer ce Mémoire dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (1885, p. 267) ; mais l'indication bibliographique donnée en cet endroit est erronée. Il faut la rétablir d'après l'indication actuelle.

(**) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. 1, 1885 p. 347.

dire lorsque la droite est tangente à γ_4, parce qu'alors deux des cotangentes sont infinies; il y a indétermination.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les angles d'intersection de la courbe γ_4 avec une droite donnée passant par le pôle O; R_1, R_2, R_3, R_4 les rayons de courbure correspondants; N_1, N_2, N_3, N_4 les longueurs correspondantes des normales limitées à la perpendiculaire élevée à la droite considérée par le point O.

La formule (9) de mon Mémoire *Sur les transformations centrales* donne

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}\left(\frac{N_i}{R_i} - 1\right) = 0.$$

8. — Si nous envisageons maintenant la formule (4') nous voyons que l'on a, en vertu de la formule (22) du Mémoire cité,

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{\cot \alpha_i}{\rho_i} = 0,$$

c'est-à-dire que *la somme des inverses des sous-tangentes est nulle*. On voit que ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Si quatre points de la quartique γ_4 sont sur une droite D *passant par le pôle* O, *les tangentes en ces quatre points coupent la perpendiculaire élevée en* O, *à la droite* D, *en des points dont le centre harmonique, relativement au point* O, *est rejeté à l'infini.*

Enfin la formule (23) du même Mémoire donne

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{R_i \sin^3 \alpha_i} = 0.$$

La somme des inverses des produits des rayons de courbure par les cubes des sinus des angles d'intersection correspondants, est nulle.

SUR LA SÉPARATION DES RACINES
DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Par M. Paul **Giraud**, ancien élève de l'École Polytechnique, boursier d'Agrégation à Paris.

1. Théorème connu servant de lemme. — Soient :

$$f(x) = 0$$

une équation de degré m,

$$f'(x) = 0$$

l'équation dérivée, q_1 et R_1 le quotient et le reste de la division de f par f'.

Les racines de l'équation $q_1R_1 = 0$ séparent les racines de l'équation $f(x) = 0$, si q_1 n'est pas un facteur de $f(x)$.

En effet, on a :

$$f(x) = q_1f'(x) + R_1$$

ou

$$\frac{1}{q_1} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{q_1^2}\,\frac{q_1R_1}{f(x)}.$$

Soit a une racine de $f(x) = 0$; $\frac{1}{q}$ est fini pour $x = a \pm \varepsilon$, ε tendant vers 0.

Pour $x = a - \varepsilon$, $\frac{f'}{f}$ croît indéfiniment par des valeurs négatives.

Pour $x = a + \varepsilon$, $\frac{f'}{f}$ croît indéfiniment et est > 0.

Donc $\frac{q_1R_1}{f(x)}$ croît indéfiniment par des valeurs positives pour $x = a - \varepsilon$, négatives pour $x = a + \varepsilon$. On peut donc répéter sur q_1R_1 les raisonnements faits sur $f'(x)$, dans le théorème de Rolle.

2. — Conservons les notations précédentes, et soient q_2 et R_2 le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par le polynôme R_1, de degré m-2 ; si q_1 et q_2 sont premiers avec $f(x)$, les racines de l'équation $q_1q_2R_2 = 0$ séparent les racines de l'équation $f(x) = 0$.

En effet, on a

$$f(x) = q_2 R_1 + R_2$$

identité qu'on peut écrire, en la multipliant par $\frac{q_1}{q_2 f}$,

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{q_1 R_1}{f(x)} + \frac{1}{(q_2)^2}\,\frac{q_1 q_2 R_2}{f(x)} \quad 1.$$

En répétant le raisonnement qui précède, puisque $\frac{q_1 R_1}{f(x)}$ croît indéfiniment par des valeurs positives pour $x = a - \varepsilon$, et négatives pour $x = a + \varepsilon$; $\frac{q_1}{q_2}$ restant fini d'après les hypothèses faites, on voit que $\frac{q_1 q_2 R_2}{f(x)}$ croît indéfiniment par des valeurs négatives pour $x = a - \varepsilon$ et positives pour $x = a + \varepsilon$. Les racines de $q_1 q_2 R_2 = 0$ séparent donc celles de la proposée.

Or q_1 est du premier degré, q_2 du deuxième, R_2 du degré $m - 3$. Si les m racines de $q_1 q_2 R_2 = 0$ sont réelles, il y en aura certainement une qui sera plus petite ou plus grande que les racines de $f(x) = 0$. Il en résulte une application évidente à l'équation du cinquième degré.

On peut facilement généraliser le raisonnement précédent; divisant f par R_2, on aura, pour séparer les racines, à résoudre quatre équations : une du premier degré, une du deuxième, une du troisième, une du degré $m - 4$; et ainsi de suite.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

TOUTE ÉQUATION ALGÉBRIQUE A UNE RACINE

Par M. **Porchon**, professeur au lycée de Versailles.

Lemme. — *Soit* F (ρ, φ) *une fonction réelle, continue et à détermination unique, des variables réelles* ρ *et* φ (*), *les racines*

(*) Nous supposons que F soit une fonction proprement dite, c'est-à-dire qu'elle ne reste pas constante si, ρ par exemple conservant une valeur fixe, φ varie entre deux limites séparées par un intervalle fini.

de l'équation en φ, $F(\rho, \varphi) = 0$ *sont des fonctions continues de* ρ; *de plus, lorsque* ρ *varie d'une manière continue, ces racines ne peuvent disparaître que par couples, et en devenant d'abord égales.*

En effet, ρ ayant reçu une valeur fixe R, si l'on fait croître φ d'une limite à une autre, la fonction F peut s'annuler pour certaines valeurs de φ. Nous désignerons ces valeurs (pour éviter toute considération d'ordre de multiplicité) comme racines de première ou de deuxième espèce, suivant que, φ passant par ces valeurs, F change ou ne change pas de signe.

Soit Φ une racine de première espèce. Alors ε et ε' désignant des quantités positives suffisamment petites, $F(R, \varphi - \varepsilon)$ et $F(R, \varphi + \varepsilon')$ ont des valeurs de signes contraires. Si maintenant on donne à R un accroissement quelconque, suffisamment petit, $F(R + h, \Phi - \varepsilon)$ et $F(R + h, \Phi + \varepsilon')$ auront les mêmes signes respectivement que $F(R, \Phi - \varepsilon)$ et $F(R, \Phi + \varepsilon')$. Donc la fonction a encore une racine comprise entre $\Phi - \varepsilon$ et $\Phi + \varepsilon'$. D'ailleurs elle n'en a qu'une dans cet intervalle, si ε et ε' sont assez petits pour que la fonction soit constamment croissante ou décroissante entre les limites (*). Puisque ε et ε' peuvent être pris aussi petits que l'on veut, la fonction $F(R + h, \varphi)$ a une racine, et une seule, aussi voisine que l'on veut de Φ, pourvu que h soit assez petit. On voit par là que, si $F(R, \varphi)$ n'a que des racines de première espèce, elles varient d'une manière continue et restent en même nombre lorsque ρ varie très peu, à partir de R.

Si, ρ variant, F perd ou acquiert des racines, il faut que cela arrive pour certaines valeurs déterminées R' de ρ, telles que, si l'on fait cette variable successivement un peu plus grande et un peu plus petite que R', le nombre des racines ne soit plus le même. Les valeurs cherchées R' ne peuvent se trouver que parmi celles qui donnent à F des racines de deuxième espèce.

(*) Il suffit pour cela que la dérivée de F par rapport à φ ne change pas de signe, ce qui est possible, puisqu'elle ne passe pas par un minimum.

Soit R′ une valeur de ρ telle que $F(R' + h, \varphi)$ et $F(R' - h', \varphi)$ n'aient pas le même nombre de racines, h et h' étant de petites quantités positives, nous savons que $F(R', \varphi)$ a une racine de deuxième espèce Φ. Donc $F(R', \Phi - \varepsilon'$ et $F(R', \Phi' + \varepsilon')$ sont de même signe, et h étant assez petit, il en est de même de $F(R' + h, \Phi' - \varepsilon)$ et $F(R' + h, \Phi' + \varepsilon)$. On en conclut que la fonction $F(R' + h, \varphi)$ a un nombre pair ou nul de racines de première espèce entre $\Phi' - \varepsilon$ et $\Phi' + \varepsilon'$. Mais il en est de même de la fonction $F(R' - h', \varphi)$, h' étant assez petit. Donc le nombre des racines de première espèce comprises entre $\Phi' - \varepsilon$ et $\Phi' + \varepsilon'$ qui se perdent ou s'acquièrent lorsque ρ varie de $R' + h$ à $R' - h'$ est pair. D'ailleurs en faisant tendre vers zéro $\varepsilon, \varepsilon', h$ et h', on voit que ces racines tendent vers Φ', ce qui démontre la seconde partie du lemme. Nous abordons maintenant la démonstration du théorème de d'Alembert.

(A suivre.)

SUR UN NOUVEAU CERCLE REMARQUABLE
DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Fin*, voir page 100.)

LES FIGURES COMPLÉMENTAIRES ET ANTI-COMPLÉMENTAIRES

11. Théorème. — *La droite complémentaire de δ est l'axe radical qui est commun au cercle circonscrit, au cercle conjugué et au cercle d'Euler.*

Mais avant d'établir les démonstrations de ce théorème, nous devons fixer d'abord quelques définitions nécessaires.

12. Définitions. — Lorsqu'un point M a pour coordonnées p, q, r, il existe un point M′ dont les coordonnées sont $q + r$,

$r+p, p+q$; ces deux points M et M', ainsi associés, ont été appelés par M. Émil. Hain *des points complémentaires* (*).

Mais pour que cette définition fasse correspondre à un point donné M un point bien déterminé M', il est nécessaire de préciserle système de coordonnées que l'on considère. En prenant, comme nous le faisons dans cette note, des coordonnées barycentriques, on voit que les deux points M et M' sont situés en ligne droite avec le centre de gravité E et que l'on a

$$ME = 2EM'.$$

C'est ce point M' déduit du point M, en prolongeant ME d'une longueur moitié moindre, point bien déterminé que nous appellerons point complémentaire barycentrique de M.

Par une extension naturelle, on peut appeler *figures complémentaires barycentriques*, relativement à un triangle ABC, deux figures F, F' qui sont homothétiques par rapport au centre de gravité; le rapport d'homothétie étant égal à 2.

On doit encore observer qu'il n'y a pas de réciprocité entre les points M et M' et, pour bien les distinguer l'un de l'autre, on peut dire que M' étant complémentaire de M, M est *anti-complémentaire barycentrique* de M''. D'après cela, pour avoir le point anti-complémentaire de M dans le système de coordonnées barycentriques, il faut prolonger ME d'une longueur double.

Les formules

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q} = \frac{\gamma}{r}, \quad \frac{\alpha'}{q+r} = \frac{\beta'}{p+r} = \frac{\gamma}{p+q},$$

donnent, entre les coordonnées de deux points complémentaires M, M', les relations :

$$\frac{\alpha'}{\beta+\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma+\alpha} = \frac{\gamma'}{\alpha+\beta} = \frac{1}{2}. \qquad (A)$$

Dans ces égalités α, β, γ représentent les coordonnées barycentriques absolues d'un point M; α', β', γ' celles du complémentaire.

Si l'on désigne par α'', β'', γ'' les coordonnées du point M''

(*) *Archiv der Mathematik und Physik* von J.-A Grunert, 1885; p. 21 (*Ueber complementare Punkte* von Emil Hain).

Voyez aussi *Journal* (Partie élémentaire), p. 131.

anti-complémentaire de M, on a, au contraire,

$$\frac{\alpha''}{\beta+\gamma-\alpha}=\frac{\beta''}{\gamma+\alpha-\beta}=\frac{\gamma''}{\alpha+\beta-\gamma}=1. \quad \text{(B)}$$

Les formules (B) et (A) permettent de trouver la complémentaire et l'anti-complémentaire d'une figure donnée, et la proposition énoncée se vérifie immédiatement.

En effet, l'équation du cercle conjugué est

$$\alpha^2(b^2+c^2-a^2)+\beta^2(a^2+c^2-b^2)+\gamma^2(a^2+b^2-c^2)=0.$$

ou :

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left\{\alpha\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\beta\frac{a^2+c^2-b^2}{2}+\gamma\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right\}-a^2\beta\gamma-b^2\gamma\alpha-c^2\alpha\beta=0.$$

L'axe radical de ce cercle et du cercle circonscrit est donc représenté par l'équation

$$\alpha(b^2+c^2-a^2)+\beta(a^2+c^2-b^2)+\gamma(a^2+b^2-c^2)=0.$$

Or, si l'on considère la droite δ et si l'on cherche la figure complémentaire de cette droite, les formules de transformation indiquées plus haut donnent précisément cette dernière équation.

Cette proposition rentre d'ailleurs dans le théorème plus général que nous allons démontrer tout à l'heure en établissant que le cercle Δ a pour figure complémentaire le cercle conjugué au triangle.

13. Construction de la droite δ. — Les propriétés diverses que nous venons d'exposer permettent, de bien des façons, de construire δ; mais voici un théorème élémentaire, duquel résulte pour δ une construction particulièrement simple.

14. Théorème. — *Si du point* A, *sommet d'un triangle* ABC, *avec* BC *pour rayon, on décrit un cercle* Δ_a, *l'axe radical de* Δ_a *avec le cercle circonscrit* Δ *coupe la parallèle menée par* A, *parallèlement à* BC *en un point* A″; *ce point et les deux autres points analogues* B″, C″ *sont situés sur une droite. Cette droite est précisément l'axe radical* δ *de* Δ *et du cercle circonscrit.*

Les puissances respectives des sommets A, B, C, relativement

au cercle Δ_a sont :

$$-a^2, \qquad c^2 - a^2, \qquad b^2 - a^2.$$

L'équation de Δ_a est donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)\{-a^2\alpha + (c^2 - a^2)\beta + (b^2 - a^2)\gamma\} - \zeta = 0,$$

en posant

$$\zeta = a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta.$$

L'axe radical de Δ_a et du cercle circonscrit ($\zeta = 0$) a donc pour équation

$$-a^2\alpha + (c^2 - a^2)\beta + (b^2 - a^2)\gamma = 0.$$

D'autre part, la parallèle menée par A au côté BC est représentée par

$$\beta + \gamma = 0.$$

Les coordonnées du point A″ sont donc

$$\frac{a^2\alpha''}{b^2 - c^2} = -\beta'' = \gamma'',$$

et l'on voit qu'elles vérifient bien l'équation

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0.$$

Ainsi, les trois points A″, B″, C″ sont situés sur δ.

La construction qui est la conséquence de cette propriété est des plus pratiques, il est facile de s'en rendre compte.

Les cercles Δ_a, Δ_b, Δ_c, que nous avons imaginés au début de cette étude et que nous retrouvons ici, se coupent deux à deux, pour des raisons évidentes, sur le cercle Δ. On obtient ainsi, et avec une vérification précieuse, trois points A_0, B_0, C_0 sur Δ. Il y a plus, la droite AA_0 est parallèle à BC et c'est justement cette droite qui, par son intersection avec B_0C_0, détermine A″. On comprend, d'après cela, que les points A_0, B_0, C_0, peuvent être obtenus avec une grande précision puisque, pour chacun d'eux, trois cercles (Δ_a, Δ_b, Δ_c pour A_0) et une droite (la parallèle à BC menée par A) concourent pour déterminer leur position.

15. Construction du point de Steiner et du poin de Tarry. — La considération du triangle $A_0B_0C_0$ conduit encore à une construction très simple du point de Steiner (*).

(*) Voyez l'étude de M. Neuberg : *Sur le point de Steiner*, Journal 1886, p. 6 et celle *sur le point de Tarry*, Mathesis, 1886, p. 5.

En effet, l'équation de B_0C_0, axe radical des cercles Δ_a et du cercle circonscrit est, comme nous l'avons observé au paragraphe précédent,

$$-a^2\alpha + (c^2 - a^2)\beta + (b^2 - a^2)\gamma = 0.$$

Cette droite coupe le côté BC ($\alpha = 0$) en un point A_1 dont les coordonnées sont :

$$\alpha_1 = 0, \qquad (c^2 - a^2)\beta_1 + (b^2 - a^2)\gamma_1 = 0.$$

On conclut de là que AA_1 passe par le point N dont les coordonnées sont proportionnelles à :

$$\frac{1}{b^2 - c^2}, \qquad \frac{1}{c^2 - a^2}, \qquad \frac{1}{a^2 - b^2}.$$

On a, de la sorte, trois droites AA_1, BB_1, CC_1, qui sont concourantes en N. Ce point, situé sur la circonférence circonscrite au triangle ABC, est le point de Steiner.

Le point de Tarry étant, sur le cercle circonscrit, diamétralement opposé au point de Steiner; la construction de l'un, détermine celle de l'autre.

16. Le cercle Δ et le cercle conjugué. — *Le cercle Δ est la figure anti-complémentaire du cercle conjugué. En d'autres termes : les deux figures sont homothétiques inverses, le centre de gravité* E *est le centre de l'homothétie et le rapport d'homothétie est égal à* 2.

Prenons le cercle conjugué dont l'équation est

$$\frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{2}[\alpha'(b^2 + c^2 - a^2) + \beta'(c^2 + a^2 - b^2) \quad (\Delta')$$
$$+ \gamma'(a^2 + b^2 - c^2)] - \zeta' = 0,$$

et cherchons la figure anti-complémentaire. Les formules de transformation sont

$$\frac{\alpha'}{\beta + \gamma} = \frac{\beta'}{\gamma + \alpha} = \frac{\gamma'}{\alpha + \beta};$$

nous avons donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)[2a^2\alpha + 2b^2\beta + 2c^2\gamma] - a^2(\alpha + \gamma)(\alpha + \beta)\ldots = 0,$$

ou
$$(\alpha + \beta + \gamma)(2a^2\alpha + 2b^2\beta + 2c^2\gamma)$$
$$- (\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - \zeta = 0,$$

ou, enfin,

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - \zeta = 0.$$

Nous retrouvons bien l'équation de Δ.

17. Remarque. — On déduit de ce rapprochement entre le cercle Δ et le cercle conjugué au triangle une construction assez curieuse de ce dernier cercle et peut-être cette observation n'a-t-elle pas été faite encore.

Le centre du cercle conjugué coïncide avec l'orthocentre, la seule difficulté réside dans la détermination du rayon ou, ce qui revient au même, dans la construction d'un point du cercle.

L'observation que nous avons en vue porte sur ce fait que : *Si par le centre de gravité* E *du triangle on mène dans le cercle circonscrit les deux transversales* $\theta E\tau$, $\theta' E\tau'$ *telles que*

$$\theta E = 2E\tau, \qquad \theta' E = 2E\tau',$$

les points τ, τ' *appartiennent au cercle conjugué ; de plus, celui-ci est tangent aux droites* $\theta\tau$, $\theta'\tau'$.

Si nous cherchons, en effet, la polaire du centre de gravité E par rapport au cercle Δ, nous trouvons, comme nous l'avons déjà observé, la droite δ; ainsi $E\theta$, $E\theta'$ sont deux tangentes à Δ. D'autre part le cercle conjugué Δ' étant la figure complémentaire de Δ, en prolongeant θE d'une longueur moitié moindre on doit obtenir un point de Δ'; il reste à montrer que ce point est placé justement sur le cercle circonscrit.

Cherchons la polaire de E par rapport au cercle conjugué; l'équation (Δ') donne

$$f'_\alpha + f'_\beta + f'_\gamma = 3\left(\alpha\frac{b^2+c^2-a^2}{2} + \beta\frac{a^2+c^2-b^2}{2} + \gamma\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)$$

$$+ (\alpha+\beta+\gamma)\frac{(a^2+b^2+c^2)}{2} - a^2\gamma - b^2\gamma - c^2\beta - c^2\alpha - a^2\beta - b^2\alpha,$$

ou, en simplifiant,

$$\alpha(b^2+c^2-a^2) + \beta(a^2+c^2-b^2) + \gamma(a^2+b^2-c^2) = 0.$$

Cette équation représente précisément, et comme le prouve l'équation (Δ'), l'axe radical de Δ' avec le cercle circonscrit.

De là résulte évidemment la justification de la remarque énoncée.

18. Théorème. — *Le cercle* Δ *n'est autre chose que le cercle conjugué au triangle obtenu en menant par les sommets de* ABC *des parallèles à ses côtés.*

En effet, appelons A″B″C″ les sommets du triangle obtenu

en effectuant la construction que nous venons d'imaginer; A″B″C″ est la figure anti-complémentaire de ABC; par suite le cercle conjugué à ABC a pour transformé le cercle conjugué à A′B′C′.

On vérifie d'ailleurs directement cette proposition en observant que les cordonnées de C″ sont proportionnelles à : 1, 1 et — 1.

Or l'équation

$$f = (\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

donne

$$f'_\alpha + f'_\beta - f'_\gamma = a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) + (\alpha + \beta + \gamma)(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$- b^2\gamma - c^2\beta - c^2\alpha - a^2\gamma + a^2\beta + b^2\alpha,$$

ou

$$f'_\alpha + f'_\beta - f'_\gamma = 2(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha + \beta);$$

la polaire de C″ est donc la droite qui correspond à l'équation

$$\alpha + \beta = 0,$$

c'est la droite A″B″.

Le triangle A″B″C″ est donc auto-polaire au cercle Δ.

On peut dire aussi, si l'on préfère, que *le cercle conjugué d'un triangle est le cercle Δ du triangle* A′B′C′ *obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle.*

19. Cercles complémentaires et anti-complémentaires. — Ces résultats nous conduisent, par une pente naturelle, à la recherche du cercle qui est le complémentaire ou l'anti-complémentaire d'un cercle donné U.

1° Soit

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0$$

l'équation de U; la figure complémentaire U′ s'obtient en transformant cette équation, les formules de transformation étant

$$\frac{\alpha}{-\alpha' + \beta' + \gamma'} = \frac{\beta}{\alpha' - \beta' + \gamma'} = \frac{\gamma}{\alpha' + \beta' - \gamma'}.$$

D'après cela, l'équation de U′ est

$$(\alpha' + \beta' + \gamma')(u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma') - a^2\beta'\gamma' - b^2\alpha'\gamma' - c^2\alpha'\beta' = 0,$$

en posant :

$$4u' = v + w - u + b^2 + c^2 - a^2,$$
$$4v' = w + u - v + c^2 + a^2 - b^2,$$
$$4w' = u + v - w + a^2 + b^2 - c^2.$$

Par exemple; si l'on cherche le complémentaire du cercle circonscrit, on doit supposer $u = v = w = 0$ et l'on a

$$\frac{(\alpha' + \beta' + \gamma')}{4}[\alpha'(b^2 + c^2 - a^2) + \beta'(c^2 + a^2 - b^2) + \gamma'(a^2 + b^2 - c^2)]$$
$$- a^2\beta'\gamma' - b^2\alpha'\gamma' - c^2\alpha'\beta' = 0;$$

cette équation représente bien le cercle d'Euler.

2° Pour avoir le cercle U″ anti-complémentaire de U, il faut employer les formules de transformation suivantes:

$$\frac{\alpha}{\beta'' + \gamma''} = \frac{\beta}{\alpha'' + \gamma''} = \frac{\gamma}{\alpha'' + \beta''},$$

lesquelles donnent, pour l'équation de U″,

$$(\alpha'' + \beta'' + \gamma'')(u''\alpha + v''\beta + w''\gamma) - a^2\beta''\gamma'' - b^2\alpha''\gamma'' - c^2\alpha''\beta'' = 0;$$

en posant

$$u'' = 2v + 2w - a^2,$$
$$v'' = 2w + 2u - b^2,$$
$$w'' = 2u + 2v - c^2.$$

Par exemple, au cercle circonscrit à ABC correspond le cercle circonscrit au triangle A″B″C″ et, en supposant dans les formules $u = v = w = 0$, on trouve pour celui-ci l'équation

$$(\alpha'' + \beta'' + \gamma'')(- a^2\alpha'' - b^2\beta'' - c^2\gamma'') - a^2\beta''\gamma'' - b^2\alpha''\gamma''$$
$$- c^2\alpha''\beta'' = 0.$$

résultat évident à priori, lorsqu'on se reporte à la signification des paramètres u, v, w.

Parmi les conséquences qui découlent de ce résultat, on peut signaler la suivante.

20. Théorème. — *Le cercle circonscrit au triangle* ABC, *le cercle* Δ *correspondant à ce triangle et le cercle circonscrit au triangle* A″B″C″, *obtenu en menant par les sommets de* ABC *des parallèles à ses côtés, ont le même axe radical.*

De ce théorème résulte encore une construction très simple de la droite δ.

21. Remarque. — Nous voulons borner aux résultats

précédents l'étude du cercle Δ; mais il est superflu d'ajouter que cette étude pourrait être poussée beaucoup plus loin sans perdre ce caractère de simplicité qui rend si particulièrement attrayante la géométrie du triangle. Il nous resterait notamment à montrer comment se comporte Δ avec les autres cercles remarquables du triangle et, d'une façon générale, avec les éléments, points, droites, cercles, etc... associés d'une certaine façon au triangle. Mais cette étude partielle de Δ que nous venons de faire, suffira, pensons-nous, à révéler l'intérêt qui s'attachera peut-être à ce cercle remarquable et à la droite δ que nous avons mise en lumière dans ce travail.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 61.)

LA DUPLICATION DU CUBE

94. Résumé historique de la question. — Le problème de la duplication du cube est celui qui correspond à l'équation

$$x^3 = 2a^3.$$

Dans cette égalité, a est une ligne donnée; x représente une longueur inconnue et que l'on propose de construire.

Ce problème est insoluble avec la règle et le compas, pour des raisons qui sont connues de tous ceux qui sont initiés aux premiers principes des vérités mathématiques, et toute discussion sur ce point a cessé depuis longtemps.

Hippocrate de Chio (*) (vers 450 av. J.-C.) observa que si l'on pouvait déterminer deux lignes x, y telles que

$$a, x, y, 2a$$

(*) Ou de *Chios* suivant l'orthographe adoptée par M. Maximilien Marie. (*Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*, t. I, p. 25.)

soient quatre termes consécutifs d'une progression géométrique, le second terme de cette suite serait le côté cherché.

En effet, les égalités

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = 2ax, \qquad (1)$$

donnent bien

$$x^3 = 2a^3.$$

Le problème de la duplication du cube devint, après cette remarque, *le problème de deux moyennes proportionnelles*. Mais, comme on l'a justement fait observer (*), « la difficulté n'était que déguisée ; elle n'avait fait que changer de forme ».

Pappus (**) a présenté une solution de ce problème ; c'est cette solution que nous allons reproduire en lui ajoutant le perfectionnement que Dioclès y apporta, en introduisant la cissoïde dans la construction qu'avait indiquée Pappus. Nous donnerons ensuite d'autres solutions du présent problème.

95. La solution de Dioclès. — Construisons d'abord un triangle rectangle CAB, en prenant

$$AB = 2a, \qquad AC = a;$$

puis, du point A comme centre avec un rayon égal à $2a$ décrivons le cercle Δ et menons enfin par le point O une transversale OQ de telle façon que l'on ait

$$IM = MP;$$

nous allons montrer que AM est égal au troisième terme y de la progression géométrique imaginée par Hippocrate.

Fig. 70.

Posons $AM = y$; nous avons $SM = 2a + y$, $MR = 2a - y$, et, par suite,

$$MP.OM = 4a^2 - y^2. \qquad (2)$$

(*) *Aperçu historique*, p. 6. — Ch. Bossut, *Essai sur l'Histoire générale des Mathématiques*, p. 35.

(**) *Collections Mathématiques:* lib. 8, prop. XI.

D'autre part, le triangle OMA et la transversale ICB donnent

$$\frac{IM}{OI} \cdot \frac{CA}{CM} \cdot \frac{BO}{BA} = 1,$$

ou

$$2MP.a = (OM - MP)(y - a).$$

Cette égalité peut s'écrire

$$MP(a + y) = OM(y - a),$$

on a donc

$$MP.OM.(a + y) = \overline{OM}^2(y - a). \quad (3)$$

Des égalités (2) et (3), on déduit

$$(4a^2 - y^2)(a + y) = (4a^2 + y^2)(y - a)$$

ou, tout calcul fait,

$$y^3 = 4a^3.$$

D'ailleurs les relations (1) donnent précisément $y^3 = 4a^3$; y représente donc bien le troisième terme de la progression d'Hippocrate.

Pour mener, comme le proposait Pappus, une transversale OQ telle que MP = MI, Dioclès, observant que OI est alors égal à PQ, imagina de construire le lieu du point I, quand on suppose que, la transversale OPQ tournant autour du point O, on prend constamment OI = PQ. C'est ainsi que la cissoïde s'est présentée pour donner la solution de ce problème de la duplication du cube.

Mais la cissoïde n'est pas, si l'on veut nous passer le mot, la seule *duplicatrice*; l'on conçoit bien, en effet, que toutes les cubiques peuvent, plus ou moins simplement, jouer le même rôle et servir à la solution de ce problème. Il s'en faut même de beaucoup que la cissoïde soit la courbe qui se prête le mieux à cette solution, comme nous allons le montrer.

96. Exemple d'une cubique duplicatrice. — Considérons deux droites rectangulaires Δ, Δ', un point fixe O, et soit effectuée la construction (1, 2, 3, *fig.* 71) dans laquelle les angles OAB, CBI sont droits. Cherchons le lieu décrit par le point I.

Posons

$$OC = d, \quad OI = \rho, \quad AOC = \omega,$$

et nous avons

$$OA = \frac{d}{\cos\omega}, \quad CB = d\,\mathrm{tg}^2\,\omega, \quad AI = \frac{d\,\mathrm{tg}^2\,\omega}{\cos\omega}$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{d(1 + \mathrm{tg}^2\,\omega)}{\cos\omega}$$

ou, plus simplement,

$$\rho = \frac{d}{\cos^3\omega}.$$

En coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit

$$x^3 = d(x^2 + y^2).$$

La courbe Γ qui correspond à cette équation affecte la forme générale qu'indique la figure. Elle est constituée, abstraction faite du point double isolé O, par une seule branche parabolique doublement infléchie et tournant sa concavité vers la droite Δ. On peut aussi vérifier que l'inflexion de la branche a lieu pour $\omega = 30°$, ce qui permet de déterminer ce point très facilement et cette remarque trouve son utilité dans le tracé de la courbe. Nous déterminerons tout à l'heure la tangente en un de ses points; montrons d'abord comment elle peut servir de duplicatrice.

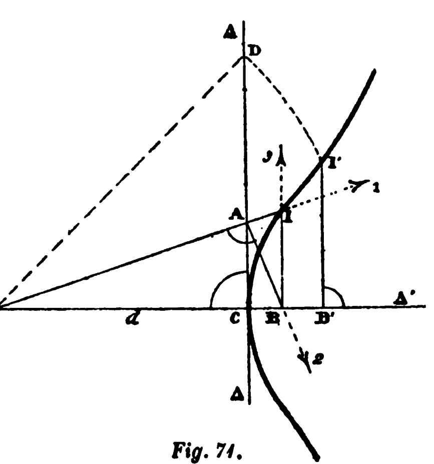


Fig. 71.

Du point O comme centre, avec un rayon égal à $d\sqrt{2}$, décrivons un arc de cercle qui coupe Γ au point I'. Nous aurons

$$x^3 = d(d\sqrt{2})^2$$

ou

$$x^3 = 2d^3.$$

Ainsi OB' est le côté du cube qui, en volume, serait le double du cube dont le côté est égal à OC.

Le tracé de la tangente à Γ, en un point pris sur cette courbe, se fait très simplement par la remarque suivante.

Soit I un point de la courbe; désignons par ρ et α les coordonnées de ce point. L'équation connue de la tangente à une courbe, dans le système des coordonnées polaires, donne, dans cet exemple et après calcul fait,

$$\frac{d}{\rho} = \cos^2\alpha \left\{ \cos\omega(\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha) - \sin\omega \sin^2\alpha \right\}.$$

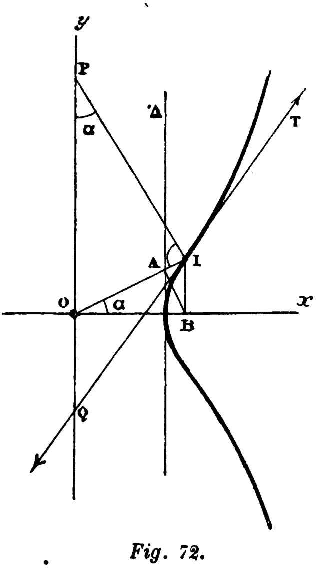


Fig. 72.

Parmi les solutions évidentes de cette égalité, on peut distinguer la suivante :

$$\omega = 90^\circ, \quad \frac{d}{\rho_0} = -2\cos^3\alpha \sin\alpha\,;$$

ρ_0 désignant la distance à l'origine du point où la tangente cherchée rencontre OI.

On a d'ailleurs

$$OI = \frac{d}{\cos^3\alpha}, \quad \text{et} \quad OP = \frac{OI}{\sin\alpha}$$

et, par conséquent,

$$OQ = \rho_0 = -\frac{OP}{2}.$$

On obtient donc la tangente IQ en prenant $OQ = \frac{PO}{2}$. Sur la figure nous avons appliqué cette construction générale à la tangente inflexionnelle et, à cet effet, nous avons pris l'angle α égal à 30°.

Nous aurons d'ailleurs occasion de signaler plus loin d'autres cubiques qui se prêtent d'une façon commode à la solution du problème qui nous occupe et dont le tracé s'effectue avec la règle et l'équerre; mais voici, pour quitter ce sujet incident, deux solutions qui nous paraissent intéressantes et qui n'exigent que le tracé des courbes simples : le cercle, l'hyperbole équilatère ou la parbole.

97. Solution du problème de la duplication du cube par un arc de cercle et un arc d'hyperbole équilatère. — Prenons un angle droit *yox* et un point M; de M, abaissons les perpendiculaires MP et MQ, puis joignons PQ. Cette droite rencontre la perpendiculaire élevée à OM, au point M, en un certain point M'.

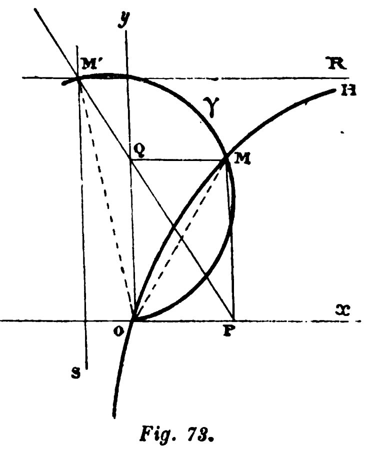


Fig. 73.

Soient x, y les coordonnées de M ; x', y' celles de M'; nous avons d'abord

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} = 1 ; \quad (1)$$

d'autre part, l'équation de MM' donne

$$y(y' - y) + x(x' - x) = 0. \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent par combinaison

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{y^3}{x^3}.$$

Le problème général, celui qui se propose de *construire un cube qui soit à un cube donné dans un rapport donné*, trouve dans cette relation une des solutions les plus simples, si nous ne nous trompons, qu'il comporte.

Toute la question revient évidemment à celle-ci : étant donné le point M', trouver le point correspondant M. Or le point M appartient : 1° au cercle γ décrit sur OM' comme diamètre *(éq. 2)*, 2° à une hyperbole équilatère H ayant pour asymptotes les droites M'R, M'S menées par M', parallèlement aux axes, et passant par l'origine *(éq. 1)*.

98. Duplication du cube au moyen de deux arcs de paraboles. — Nous donnerons encore, pour terminer cette digression, une solution du problème de la duplication du cube au moyen de deux arcs de parabole.

Prenons un rectangle OAMB, projetons le sommet M sur AB en M'. Nous avons

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2}, \quad \overline{M'A}^2 = AM.AR, \quad \overline{M'B}^2 = BS.BM,$$

et par suite

$$\frac{M'Q}{M'T} = \left(\frac{MA}{MB}\right)^3.$$

Comme nous l'avons observé au paragraphe précédent, le problème revient, d'après cela, à déterminer le point M, connaissant M'. Or, lorsqu'on fait tourner autour de M' les deux droites rectangulaires AB et M'M, les relations :

$$\overline{M'S}^2 = MS.BS, \quad \overline{M'R}^2 = MR.AR,$$

prouvent que l'on peut considérer M comme appartenant aux deux paraboles P, P' lesquelles se construisent point par point au moyen de la règle et de l'équerre, comme l'indique la figure, la construction relative au point M pouvant se reproduire pour tous les autres points de P et de P'.

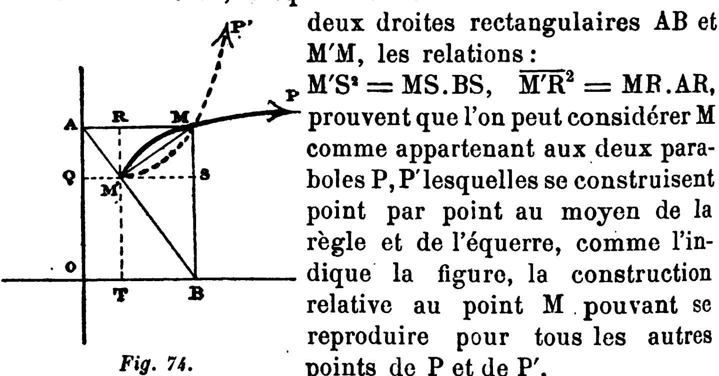


Fig. 74.

On voit que cette construction réalise, avec la généralisation convenable, l'idée arithmétique qui avait conduit Hippocrate au problème des deux moyennes proportionnelles.

(A suivre.)

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

7*. — *Démontrer que le parallélipipède de Binet a un volume constant.*

Considérons un hyperboloïde à une nappe H, et trois génératrices quelconques G. G', G'' de cette surface, mais appartenant au même système. Si par chacune de ces droites on mène des plans parallèles aux deux autres, on détermine ainsi un parallélipipède qui paraît avoir été

imaginé, pour la première fois, par Binet (*Journal de l'École Polytechnique*, 16e cahier). La proposition énoncée exprime que le volume de ce parallélipipède est constant, quelles que soient les génératrices de même système G, G', G''.

On sait que si l'on prend pour axes de coordonnées les parallèles aux arêtes du parallélipipède menées par le centre de cette figure, l'équation de H_1 peut s'écrire

$$myz + nxz + pxy + mnp = 0,$$

ou encore

$$\frac{yz}{np} + \frac{xz}{mp} + \frac{xy}{nm} + 1 = 0,$$

$2m$, $2n$, $2p$ désignant les longueurs des arêtes du parallélipipède.

D'ailleurs, si l'on désigne par λ, μ, ν les angles des faces de ce parallélipipède, on sait aussi que son volume V est donné par la formule

$$V = 8mnp\sqrt{\Delta_0},$$

en posant

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Cela posé, un changement d'axes, effectué sans que l'origine soit déplacée, fait que

$$\frac{yz}{np} + \frac{xz}{mp} + \frac{xy}{mn} + 1$$

devient

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1;$$

les nouveaux axes sont rectangulaires; et a, b, c désignent les longueurs des axes de l'hyperboloïde.

Dans la notation ordinaire, la fonction $\frac{\Delta}{\Delta_0}$ jouissant de la propriété de l'invariance, on a donc

$$\frac{\left(\frac{1}{m^2n^2p^2}\right)}{\Delta_0} = \frac{1}{a^2b^2c^2},$$

ou

$$abc = mnp\sqrt{\Delta_0}.$$

Cette égalité prouve que *le parallélipipède de Binet a un volume égal à celui du parallélipipède construit avec trois diamètres conjugués quelconques.*

Ce théorème remarquable est, croyons-nous, connu depuis longtemps; il fait l'objet de la question 1531, proposée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1885, p. 248). La démonstration précédente nous a été verbalement communiquée par M. Ed. Lucas.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Brocard.

... La quartique trinodale γ_4 que vous avez étudiée aux §§ 31-39 de votre Mémoire sur les courbes parallèles et sur laquelle M. d'Ocagne vous a communiqué d'intéressantes et nouvelles remarques, a déjà été rencontrée dans d'autres recherches. Elle est en effet le lieu géométrique qui répond à la question 22 de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. I, 1874-1875.

Étant donnés trois points fixes, trouver le lieu d'un quatrième point tel que les axes des deux paraboles passant par ces quatre points forment entre eux un angle donné. (Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1874.)

Voir aussi les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, 1875, p. 172-175.

La solution de la question 22 a été très savamment exposée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* par M. Philippin (p. 124-132), puis par MM. Saltel et Dewulf (p. 196-198)...

BIBLIOGRAPHIE

SUR L'HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES, de M. Maximilien Marie (*Bibliotheca Mathematica*, 1886, nos 1, 2). Extrait de trois lettres adressées à M. G. Eneström, par B. Boncompagni (Stockholm). — Dans cette petite brochure le prince B. Boncompagni, dont la profonde érudition et le grand amour des sciences sont connus de tous ceux qui, à un titre ou à un autre, s'occupent de mathématiques, relève plusieurs erreurs qui ont échappé à M. Maximilien Marie. Nous n'avons pas à prendre ici parti entre M. Maximilien Marie et le prince Boncompagni dans les délicates questions historiques pour lesquelles notre compétence est absolument nulle. Nous estimons pourtant que les inexactitudes révélées par le savant auteur de la brochure que nous signalons à nos lecteurs, bien que du plus haut intérêt, ne détruisent pas le très grand mérite de l'ouvrage de M. Marie. Il nous semble qu'il n'est que juste de reconnaître que, dans une œuvre aussi délicate et aussi considérable que celle qu'a entreprise M. Marie en publiant cette histoire des sciences mathématiques et physiques, des erreurs, même assez nombreuses, sont inhérentes à un pareil travail et je suis sûr que M. Marie, le premier, saura le plus grand gré à son contradicteur de les lui avoir indiquées.

Nous rappelons à ce propos qu'un extrait de cet ouvrage a paru dans ce journal (*), il y a deux ans. Il devait être suivi d'une analyse que feu Vazeille, notre collaborateur à cette époque, se promettait d'écrire. Mais, comme je l'ai rappelé dans la notice nécrologique que je lui ai consacrée, Vazeille était pour la rédaction des articles plein de bonnes intentions qui malheureusement aboutissaient rarement (**).

G. L.

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1884, p. 92.

(**) Les neuf premiers volumes de l'ouvrage en question ont été déjà publiés et sont en vente à la librairie Gauthier-Villars. trois volumes restent encore à paraître et compléteront cette grande et importante publication; avec le neuvième volume commence la treizième période, de Lagrange à Laplace.

QUESTIONS PROPOSÉES

195. — On considère des hyperboles équilatères H qui ont pour centre un point fixe O et qui passent par un autre point fixe A.

Trouver le lieu décrit par les sommets réels de H.

Ce lieu est une lemniscate de Bernoulli.

On propose, après avoir reconnu ce fait par le calcul, de l'établir géométriquement en prenant pour base de cette démonstration géométrique la propriété suivante :

Le produit des distances d'un foyer F *d'une hyperbole équilatère à deux points* A, A' *de la courbe, diamétralement opposés, est égal au carré de* $\frac{AA'}{2}$.

On établira d'abord géométriquement cette relation.

(*G. L.*)

196. — Circonscrire à une ellipse un quadrilatère ou un triangle inscrits à un cercle concentrique. Faire voir que le problème est impossible ou indéterminé, et chercher la valeur du rayon pour laquelle il est indéterminé.

Mêmes problèmes quand le centre du cercle est confondu avec l'un des foyers. (*Amigues.*)

197. — Lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et dans lesquelles la somme des carrés des longueurs algébriques des axes est égale à K.

Distinguer s'il y a lieu les arcs qui correspondent à des centres d'ellipses. (*Amigues.*)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12170-6.

SUR QUELQUES DÉCOMPOSITIONS EN CARRÉS

Par M. **Édouard Lucas.**

Si l'on désigne par a et b les deux racines de l'équation $x^2 = Px - Q$, et si l'on pose

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n,$$

on sait que U_n et V_n sont entiers, si P et Q sont entiers, car on a les formules de récurrence

$$U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n,$$
$$V_{n+2} = PV_{n+1} - QV_n.$$

Désignons par Δ l'expression $(a - b)^2 = P^2 - 4Q$, il est facile de vérifier les formules suivantes

$$U_{2n+1} = U_{n+1}^2 - QU_n^2, \quad (1)$$
$$V_{2n} = V_n^2 - 2Q^n, \quad (2)$$
$$V_{2n} = \Delta U_n^2 + 2Q^n. \quad (3)$$

De la formule (1) que j'ai publiée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. III, p. 405), il résulte immédiatement ces deux théorèmes.

I. — La fonction numérique U_{2n+1} est une somme de deux carrés, si le produit $Q = ab$ est égal en signe contraire au carré d'un nombre entier.

Pour $P = 2$, $Q = -1$, on a la proposition de M. Catalan.

II. — La fonction numérique U_{2n+1} est décomposable en un produit de deux facteurs, si le produit $Q = ab$ est le carré d'un nombre entier.

Les deux facteurs sont

$$U_{n+1} + U_n\sqrt{Q} \quad \text{et} \quad U_{n+1} - U_n\sqrt{Q};$$

exemple $P = 4$, $Q = 1$.

De la formule (2) on déduit de même:

III. — Lorsque le produit $Q = ab$ est le double d'un carré négatif, la fonction numérique V_{4n2} est une somme de deux carrés.

(*) Voir le *Journal de Mathématiques spéciales*, p. 113.

IV. — Lorsque le produit $Q = ab$ est le double d'un carré positif, la fonction numérique V_{4n+2} est le produit de deux nombres entiers.

Par exemple, pour $a = 2$, $b = 1$, on a la formule de M. Lelasseur

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1).$$

La formule (3) donne encore :

V. — Lorsque le discriminant $\Delta = (a - b)^2$ est le double d'un carré, la fonction numérique $\frac{1}{2} V_{4n}$ est une somme de deux carrés.

VI. — Lorsque Δ est le double d'un carré négatif, la fonction $\frac{1}{2} V_{4n}$ est décomposable en un produit de deux facteurs entiers.

VII. — Lorsque le produit $Q\Delta$ est le double d'un carré, la fonction $\frac{1}{2} V_{4n+2}$ est une somme de deux carrés.

VIII. — Lorsque le produit $Q\Delta$ est le double d'un carré négatif, la fonction $\frac{1}{2} V_{4n+2}$ est le produit de deux nombres entiers.

Ainsi, dans l'exemple choisi par M. Catalan, pour $P = 2$, $Q = -1$, $\Delta = 2\sqrt{2}$, on a

$$\frac{1}{2} V_{4n+2} = (2\, U_{n+1} + 1)\,(2\, U_{n+1} - 1).$$

Les formules

$$\frac{U_{3n}}{U_n} = \Delta\, U_n^2 + 3Q^n, \qquad \frac{V_{8n}}{V_n} = \Delta\, U_n^2 + Q^n,$$

$$\frac{U_{8n}}{V_n} = V_n^2 - Q^n, \qquad \frac{V_{8n}}{V_n} = V_n^2 - 3\,Q^n,$$

donnent lieu à un grand nombre de théorèmes du même genre.

Enfin, si l'on se sert de la formule de Gauss (*Disquisitiones*, sect. VI),

$$4\,\frac{z^p - 1}{z - 1} = Y^2 \pm p\, Z^2,$$

on a ce théorème général : Si Δ est égal au produit d'un nombre premier p de la forme $4q + 3$ par un carré positif ou négatif, les quotients

$$\frac{4U_{pn}}{pU_n} \text{ et } \frac{4V_{pn}}{pV_n}$$

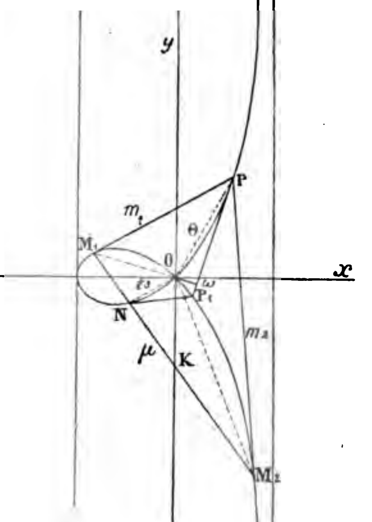
sont, quelle que soit la valeur entière de n, égaux à une somme de deux carrés, dans le premier cas, et à une différence de deux carrés, dans le second.

Au moyen de tous ces théorèmes, et d'autres analogues, on peut démontrer d'un très grand nombre de manières que tout nombre entier est la somme de quatre carrés.

NOTE SUR LA STROPHOIDE

Par M. **Lebel**, maître répétiteur au Lycée de Nice.

1. — Par un point P pris sur une strophoïde, on mène des tangentes PM_1 PM_2 à la courbe, et l'on joint M_1M_2. Le triangle M_1PM_2 ainsi formé jouit de plusieurs propriétés assez remarquables.



Désignons par :

θ le coefficient angulaire de OP
t_1 — — OM_1
t_2 — — OM_2
t_3 — — ON
m_1 — — PM_1
m_2 — — PM_2
μ — — M_1M_2

Nous allons calculer les relations qui existent entre ces divers coefficients angulaires.

2. — Soit

$$(x^2 + y^2)x - a(y^2 - x^2) = 0.$$

l'équation de la strophoïde et

$$ux + vy - 1 = 0, \quad (1)$$

celle d'une droite. L'équation du faisceau de droites joignant

l'origine aux points d'intersection de cette droite avec la courbe est

$$(x^2 + y^2)x - a(y^2 - x^2)(ux + vy) = 0$$

ou

$$(1 + au)x^3 + avx^2y + (1 - au)xy^2 - avy^3 = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires de ces droites sera

$$t^3 - \frac{1 - au}{av} t^2 - t - \frac{1 + au}{av} = 0. \qquad (2)$$

Si $t't''t'''$ sont les racines de cette équation, nous avons donc les relations

$$t' + t'' + t''' = \frac{1 - au}{av}, \qquad (3)$$

$$t''t''' + t'''t' + t't'' = -1, \qquad (4)$$

$$t't''t''' = \frac{1 + au}{av}. \qquad (5)$$

Considérons la droite PM_1. L'équation (2) relative à cette droite admet t comme racine double, et comme troisième racine θ. La relation (4) devient

$$t_1^2 + 2\theta t_1 + 1 = 0.$$

Les coefficients angulaires t_1 et t_2 sont les racines de l'équation

$$t^2 + 2\theta t + 1 = 0. \qquad (6)$$

On a donc

$$t_1 + t_2 = -2\theta \qquad (7)$$

$$t_1 t_2 = 1. \qquad (8)$$

Cette dernière relation permet déjà d'énoncer une propriété des points M_1M_2. Soient x_1 et x_2 leurs abscisses :

$$x_1 = a\frac{t_1^2 - 1}{t_1^2 + 1}, \quad x_2 = a\frac{t_2^2 - 1}{t_2^2 + 1}.$$

La relation (8) montre que

$$x_1 = -x_2.$$

Ainsi, *les points* M_1 *et* M_2 *sont équidistants de* Oy.

3. — Réciproquement, si deux points M_1, M_2 sont équidistants de Oy, et situés de part et d'autre de Ox, les coefficients correspondants t_1, t_2 vérifiant la relation (8), *les tangentes menées en ces deux points à la strophoïde vont se rencontrer sur la courbe.*

En effet, calculons le coefficient angulaire t' de la droite OP

P étant le point de rencontre de la tangente en M_1 avec la strophoïde. Il suffit de faire dans l'équation (4) $t'' = t''' = t_1$

$$2t_1t' + t_1^2 + 1 = 0,$$

$$t' = -\frac{1}{2}\left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right).$$

Cette expression est une fonction symétrique de t_1 et $\frac{1}{t_1}$, elle reste donc la même lorsqu'on change t_1 en t_2.

Les tangentes en M_1 et M_2 rencontrent la courbe au même point.

4. — Considérons maintenant l'équation (1) comme représentant la droite PM_1. Les relations (3) et (5) permettent de calculer le coefficient angulaire $-\frac{u}{v}$ de cette droite. Retranchons membre à membre (3) et (5), nous avons

$$-2\frac{u}{v} = t' + t'' + t''' - t'\,t''\,t''',$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\,(\theta + 2t_1 - \theta t_1^2). \qquad (9)$$

Mais on tire de (6)

$$t_1^2 = -(2\theta t_1 + 1).$$

Substituant, il vient

$$m_1 = \frac{1}{2}\,(\theta + 2t_1 + 2\,\theta^2 t_1 + \theta),$$

ou

$$m_1 = (\theta^2 + 1)\,t_1 + \theta. \qquad (10)$$

De même

$$m_2 = (\theta^2 + 1)\,t_2 + \theta. \qquad (11)$$

Si l'équation (1) représente $M_1 M_2$; t_1, t_2, t_3 sont racines de l'équation (2), et en vertu de la relation (4) nous avons

$$(t_1 + t_2)\,t_3 + t_1\,t_3 + 1 = 0$$

$$-2\,\theta t_3 + 2 = 0,$$

$$t_3 = \frac{1}{\theta}. \qquad (1)$$

Nous voyons, par cette relation, que *les points* P *et* N *sont équidistants de* Oy *et jouissent de la même propriété que les points* M_1 *et* M_2.

5. — De (9) on déduit le coefficient angulaire μ en y remplaçant t', t'', t''' respectivement par t_1, t_2, t_3 :

$$\mu = \frac{1}{2}\left(-2\theta + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta}\right),$$

$$\mu = -\theta. \qquad (13)$$

Nous pouvons faire ici deux remarques :

Les droites OP_1 M_1M_2 *sont également inclinées sur* Ox.

Les droites ON, M_1M_2 *sont rectangulaires.*

La dernière permet de trouver l'enveloppe de M_1M_2 lorsque le point P décrit la strophoïde.

Cette enveloppe est la podaire négative de la strophoïde par rapport à son point double, c'est-à-dire une parabole ayant pour axe Ox, pour directrice Oy, et pour sommet le point A.

6. — Partant des relations établies, nous allons démontrer que *le point double de la strophoïde est le centre du cercle inscrit au triangle* M_1PM_2.

1° *La droite* OP *est bissectrice de l'angle* M_1PM_2.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que les droites PM_1, PM_2, OP et la perpendiculaire à OP forment un faisceau harmonique, c'est-à-dire que l'on a

$$(m_1 + m_2)\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right) - 2(m_1 m_2 - 1) = 0,$$

$$-2\theta^2(\theta^2 - 1) - 2[(\theta^2 - 1)^2 - 2\theta^2(\theta^2 + 1) + \theta^2 - 1] = 0,$$

$$-2\theta^2(\theta^2 - 1) + 2(\theta^4 - \theta^2) = 0;$$

ce qui est évident.

2° *La droite* OM_1 *est bissectrice de l'angle* M_2M_1P.

On le démontre de la même manière en montrant que M_1M_2, PM_1, OM_1 et la perpendiculaire à OM_1 forment un faisceau harmonique. Il faut alors vérifier que

$$(m_1 + \mu)\left(t_1 - \frac{1}{t}\right) - 2(m_1\mu - 1) = 0,$$

$$(\theta^2 + 1)(t_1^2 - 1) + 2[(\theta^2 + 1)\theta t_1 + \theta^2 + 1] = 0,$$

$$-2\theta t_1 - 2 + 2(\theta t_1 + 1) = 0,$$

identité évidente.

La même propriété existe évidemment pour OM_2.

La proposition énoncée est donc démontrée.

(A suivre.)

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 53.)

LES TRANSFORMATIONS CENTRALES

44. Considérations générales sur les transformations centrales. — J'aborde maintenant quelques exemples de transformations centrales, mais en me préoccupant uniquement du point que j'ai eu particulièrement en vue dans cette note; c'est-à-dire du tracé par points et par tangentes des courbes qui sont transformées d'une courbe donnée, suivant une certaine loi géométrique.

Soient deux points m, M, supposés mobiles dans un plan, ou dans l'espace, et tellement placés que la droite mM passe constamment par un point fixe O. Si m décrit un lieu géométrique γ; M, de son côté, décrit un autre lieu géométrique Γ; en supposant toutefois que les distances

$$Om = u, \qquad OM = U,$$

vérifient une certaine relation

$$f(u,U) = 0. \qquad (A)$$

Les deux courbes γ, Γ se correspondent ainsi l'une à l'autre; c'est ce qu'on nomme une transformation centrale.

Pour nous borner ici aux transformations centrales effectuées dans un plan, nous ferons observer qu'on peut distinguer celles-ci en deux genres suivant que la formule (A) renferme, ou non, l'angle ω, inclinaison du rayon vecteur OmM sur l'axe polaire. La transformation par rayons vecteurs réciproques, et aussi celle qui engendre les courbes conchoïdales, sont des exemples de transformations centrales du premier genre; *la transformation réciproque* que nous avons étudiée ici (*) et dans laquelle le segment mM est constam-

---

(*) Voyez *Journal*, 1882, p. 49.

ment vu d'un certain point fixe sous un angle droit, rentre dans le second genre.

Dans l'un ou l'autre de ces deux genres, on distingue naturellement *les transformations unicursales* et celles, plus générales, qui sont caractérisées par deux nombres entiers positifs, p et q. La formule (A) fait d'ailleurs connaître ces deux paramètres; p et q désignant le plus grand exposant qui, dans cette formule, affecte respectivement les lettres u, U. Lorsqu'on a $p = 1$ et $q = 1$, la transformation est unicursale; on peut lui donner aussi le nom de *transformation uniforme*. Enfin, si la formule (A) est symétrique par rapport aux lettres u et U, on dit que *la transformation considérée est involutive.*

45. Application générale des transversales réciproques aux transformations centrales. — L'application que nous voulons mettre ici en lumière et qui a toute la généralité possible, vise, bien entendu, le tracé des tangentes.

Imaginons deux courbes γ et Γ transformées l'une de l'autre comme nous venons de l'expliquer dans le paragraphe précédent. En conservant les notations adoptées posons :

$$O\mu = OM - Om = U - u,$$

et considérons la courbe G lieu du point μ, courbe qui se trouve ainsi adjointe à γ et à Γ.

En prenant deux rayons vecteurs infiniment voisins ($o\mu m$M, $o\mu' m'$M'), si les points o, μ, m, M se succèdent dans l'ordre des lettres qui les représentent, les droites $\mu\mu'$, mm' sont deux transversales réciproques du triangle OMM'. En passant à la limite, on reconnaît que la connaissance des tangentes à deux des courbes γ, Γ, G entraîne celle de la tangente à la troisième. Cette conclusion n'est pas infirmée par la disposition des quatre points o, μ, m, M; le tracé de la tangente inconnue est seulement modifié d'après la situation respective de ces points, de telle sorte, que le principe des transversales réciproques soit toujours vérifié.

Dans l'exposition précédente on reconnaîtra sans doute une application nouvelle de cette idée de *dépendance corrélative*

dont Poncelet a montré toute la puissance dans sa théorie des polaires réciproques, idée aujourd'hui classique, et qui, prise dans son sens le plus étendu, peut se formuler ainsi : ***d'une propriété connue appartenant à une fig.* f, *déduire une propriété nouvelle pour la fig.* F, *transformée de la proposée.*** L'évidence même du principe que nous avons posé tout à l'heure, la simplicité excessive de la construction à laquelle il conduit, laquelle, suivant la disposition des points considérés, consiste à prendre le symétrique d'un point par rapport à un autre point, ou à mener par un point donné une droite partagée par deux autres en deux parties égales, n'ôtent rien, bien au contraire, à son utilité ; et ce n'est pas, croyons-nous, exagérer le service que les transversales réciproques sont appelées à rendre dans leurs applications au tracé des tangentes, que de dire qu'elles ont vraiment doublé le nombre des cas où l'on peut, avec la plus grande élégance, déterminer la construction de la tangente. Mais sans insister sur ces réflexions générales, nous voulons seulement nous attacher à quelques exemples particulièrement simples de transformations centrales.

46. — Voici un premier exemple qui prend son origine dans les idées précédentes quand on applique celles-ci à la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Prenons une courbe γ et un point fixe O ; par ce point menons un rayon vecteur rencontrant γ en m, puis déterminons le point M sur le prolongement de Om et de telle sorte que

$$Om.mM = k^2,$$

le point M décrit une certaine courbe Γ et nous voulons déterminer la tangente à Γ en ce point M.

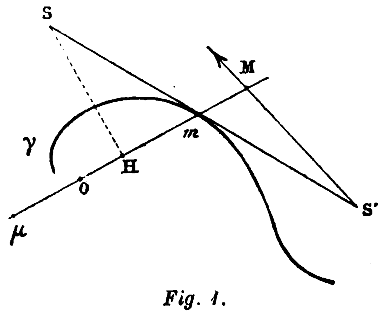


Fig. 1.

A cet effet, observons qu'en prenant $O\mu = mM$, nous avons

$$O\mu.Om = k^2;$$

d'après une propriété connue la tangente au lieu décrit par μ coupe la tangente SS′ en un point S qui appartient à la perpendiculaire élevée au milieu H de μm.

Le point S étant déterminé, il suffit de prendre le symétrique S′, par rapport à m; le principe des transversales réciproques prouve que S′M est la tangente demandée.

Cette construction subsiste si le segment mM a, comme dans la *fig.* 2 une direction contraire à celle du rayon vecteur Om; il faut seulement bien observer que *le segment* Oμ a, dans un cas comme dans l'autre, *la direction du segment* Mm.

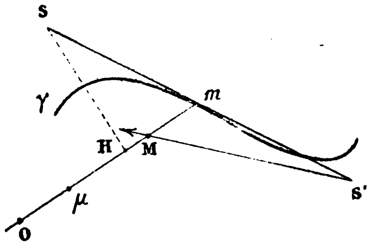


Fig. 2.

Cette transformation des figures planes, en posant, comme nous l'avons fait plus haut,

$$Om = u, \quad OM = U,$$

correspond à la formule

$$u(U - u) = \pm k^2, \qquad (1)$$

qu'on peut encore écrire

$$U = u \pm \frac{k^2}{u}.$$

Adoptons le signe — (ce qui correspond, comme le montre la formule (1), au cas où le segment mM est porté dans la direction mO) et supposons que la courbe γ soit une circonférence passant par le pôle O, le lieu décrit par M, la transformée du cercle en d'autres termes, est une cubique circulaire. La cissoïde et la strophoïde ordinaires peuvent, en particulier, être engendrées de cette façon.

En prenant pour γ une droite quelconque, on trouve encore pour la transformée une cubique circulaire; et l'on arrive ainsi, par transformation du cercle ou de la droite, à une élégante construction pour le tracé des tangentes aux cubiques circulaires unicursales ayant un axe de symétrie.

47. — Considérons maintenant deux courbes quelconques f, φ et sur le rayon vecteur qui tourne autour du pôle O pre-

nons à chaque instant

$$BC \cdot AB = k^2;$$

il s'agit de mener la tangente au lieu décrit par C.

Soit

$OP = AB, \qquad OQ = BC;$

nous avons donc

$$OP \cdot OQ = k^2,$$

par suite, les tangentes θ, θ' aux courbes décrites par les points P et Q se coupent sur la perpendiculaire élevée au milieu

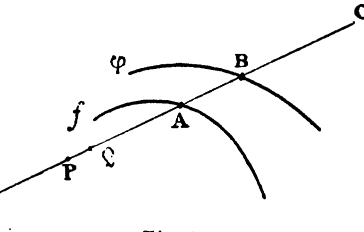


Fig. 3.

de PQ. La tangente θ se détermine par le principe des transversales réciproques appliqué aux points (O, P, A, B). Connaissant θ, nous en déduisons θ'; pour achever la construction il suffit d'appliquer de nouveau le principe rappelé aux quatre points (O, Q, B, C).

En remplaçant les courbes f et φ par des droites ou des circonférences passant par le pôle, on obtient différentes courbes dont la discussion est très facile, vu la génération si simple qui leur a donné naissance. Par exemple, en prenant deux cercles passant par le pôle et tangents entre eux, on retrouve encore une génération des cubiques circulaires à axe de symétrie.

(A suivre.)

STÉRÉOTOMIE : MUR CYLINDRIQUE

Par M. **Songaylo.**

1. — Un mur de soutènement a la forme d'un prisme droit, dont la base est un trapèze birectangle ABCD' *(fig. 1)*. Il est divisé en voussoirs par des joints composés de deux parties planes : l'une EF perpendiculaire au plan de la face en talus du mur, l'autre FG horizontale. Lorsque deux murs ainsi formés se rencontrent, on raccorde leurs faces exté–

rieures à l'aide d'une surface cylindrique, dont la trace horizontale est un arc de cercle et dont les génératrices sont parallèles à l'intersection des plans inclinés qui terminent ces murs. La partie qui raccorde les deux murs droits porte le nom de mur cylindrique.

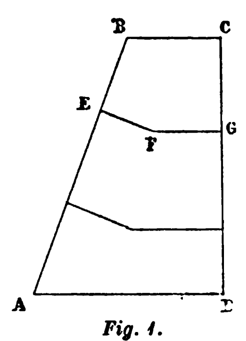


Fig. 1.

Pour exécuter l'épure de l'appareil d'un mur cylindrique, on est donc conduit au problème suivant :

On donne : un plan $P\alpha P'$ perpendiculaire au plan vertical ; dans ce plan, une horizontale ab, $a'b'$ et une droite quelconque bc, $b'c'$; puis, à l'extérieur du plan, un cercle horizontal bd, $b'd'$, tangent à ab, $a'b'$. Ce cercle est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à bc, $b'c'$. On propose de construire la trace, sur un plan horizontal H′ de la *normalie* au cylindre suivant le cercle bd, $b'd'$ (*fig.* 2).

Le tracé s'effectue très simplement à l'aide du théorème nouveau qui suit :

2. Théorème. — *Quand un cylindre admet des plans cycliques, la* NORMALIE *de cette surface, suivant l'une de ses sections circulaires, a pour trace, sur un plan parallèle à celui de la section, une conchoïde de Nicomède.*

Soit o, o' le centre du cercle donné (*fig.* 2) ; la normale au cylindre en un point quelconque f, f' de ce cercle a pour projection horizontale of ; il en résulte que la normalie est un conoïde qui a pour directrices le cercle donné et la verticale menée par son centre o, o', dont le plan directeur est perpendiculaire à la direction des génératrices du cylindre. Faisons passer ce plan directeur par le point o, o' et construisons sa trace R, H′, sur le plan horizontal H′, à l'aide de l'une ($o\omega$, $o'\omega'$) de ses lignes de front.

Cherchons maintenant la projection horizontale du point de la trace de la normalie sur H′ qui répond à la normale au cylindre en f, f'. Pour ce but, menons par o, o' une parallèle à cette normale ; sa projection horizontale se confond avec

fo et sa trace sur le plan H′ se projette en μ. Il en résulte que le point demandé s'obtient en prenant

$$fm = o\mu;$$

on en conclut que l'on a

$$\mu m = of;$$

mais *of* est le rayon du cercle donné; donc le lieu de *m* est

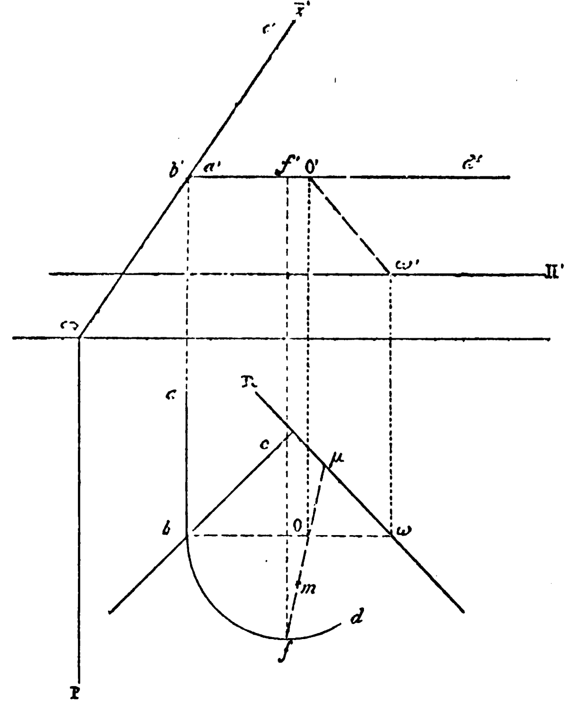


Fig. 2.

la conchoïde de la droite R, dont les divergentes ont pour centre de rayonnement le centre *o* du cercle *bd* et pour longueur constante le rayon de ce cercle.

En terminant, observons que le théorème conduit à une méthode simple de transformation par projection gauche de la conchoïde de Nicomède en cercle; ce qui permet d'appliquer à la conchoïde la méthode de transmutation des figures.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 134.)

CHAPITRE IX

LA STROPHOÏDE, LA TRISECTRICE DE MAC-LAURIN ET LES CUBIQUES CIRCULAIRES UNICURSALES

99. — J'arrive maintenant au tracé de la strophoïde et je dois rappeler d'abord la définition de cette courbe. On sait qu'étant données deux droites, Δ, Δ' se coupant au point B, et sur celle-ci un point fixe A ; si l'on mène par A une transversale rencontrant Δ en C sur laquelle on prend, à chaque instant,

$$CI = CI' = CB,$$

le lieu du point I, ou du point I', est une courbe du troisième degré, présentant au point C un nœud droit; cette courbe est la *strophoïde*.

Lorsque les droites Δ, Δ' sont rectangulaires, la cubique est symétrique par rapport à Δ'; elle prend le nom de strophoïde droite; dans l'hypothèse contraire, on a une strophoïde oblique.

Mais cette génération, point par point, exige l'emploi du compas et nous voulons indiquer comment on peut construire la strophoïde avec la règle et l'équerre. Seulement, pour éviter certaines longueurs et des répétitions sans intérêt, nous aborderons immédiatement le tracé des cubiques circulaires unicursales, en indiquant les conditions spéciales que doit réaliser la figure pour que la construction signalée conduise au cas de la strophoïde ou à celui de la trisectrice de

Mac-Laurin, courbes remarquables que nous avons plus particulièrement en vue dans ce chapitre.

100. — Le problème en question comporte naturellement une infinité de solutions; nous nous bornerons à exposer celles qui, parmi tous les tracés que nous avons imaginés, nous ont paru résoudre le problème qui nous occupe d'une façon simple.

Imaginons une droite Δ et trois points en ligne droite O, O′, O″; O′ étant situé sur Δ; puis effectuons la construction indiquée (1, 2, 3). Nous obtenons ainsi un point I; cherchons le lieu décrit par ce point.

Ayant posé:

$$O'I = \rho,$$
$$IO''x = \omega,$$
$$OO' = d,$$
$$O'O'' = d';$$

Fig. 75.

nous avons

$$O'M = d\,\frac{\sin\omega}{\sin(\theta-\omega)}$$

D'autre part

$$\rho = O'H - O'K = O'M\cos(\theta-\omega) - d'\cos\omega,$$

par suite

$$\rho = d\,\frac{\sin\omega\cos(\theta-\omega)}{\sin(\theta-\omega)} - d'\cos\omega.$$

En convertissant cette équation en coordonnées cartésiennes, on a pour le lieu du point I

$$(x\sin\theta - y\cos\theta)(x^2+y^2) = \sin\theta\,(dy^2 - d'x^2) + (d+d')xy\cos\theta. \qquad (A)$$

A cette équation correspond une cubique passant par les ombilics du plan et présentant en O″ un point double; en d'autres termes, ce lieu est une cubique circulaire unicursale.

Si le point O′ se trouve placé au milieu de OO″, c'est-à-dire si l'on suppose $d = d'$, les tangentes au point double, d'après l'équation (A), sont rectangulaires et le lieu décrit par I est une strophoïde.

Il est d'ailleurs bien facile de le vérifier. En effet, joignons O'I et menons O'A parallèle à Δ ; puis observons que la perpendiculaire abaissée de O' sur MI tombant au milieu de ce segment, le triangle MOI' est isoscèle. D'après cette remarque nous pouvons dire que les angles $\widehat{1}$ et $\widehat{2}$ sont égaux et il en résulte que le triangle O'AI est isoscèle. Le lieu du point I est donc une strophoïde ; la strophoïde est droite lorsque Δ est perpendiculaire sur OO'O''.

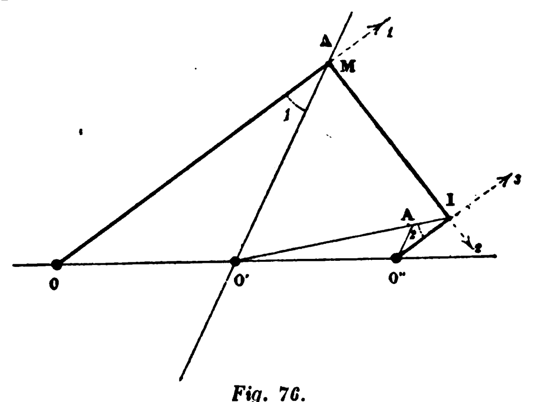


Fig. 76.

(*A suivre.*)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Ed. Lucas.

... On peut ajouter à la propriété relative au parallélipipède de Binet (p. 140) celle-ci :

La somme des carrés des diagonales des faces partant d'un sommet du parallélipipède, diminuée de la somme des carrés des arêtes partant du même sommet est constante.

Ce théorème peut s'établir par une démonstration analogue à celle qui a été donnée (*loco cit.*) pour reconnaître que le volume du parallélipipède de Binet est constant.

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

8. — *Déterminer le volume d'un ellipsoïde dont les axes sont* a, b, c.

« La décomposition d'un volume en cylindres infiniment minces à bases parallèles peut s'appliquer à tous les cas; mais il arrive le plus ordinairement que l'expression de la section qui sert de base à l'un de ces cylindres, au lieu d'être connue *à priori*, doit elle-même être déterminée par une intégration préalable (*). » Cette méthode générale dont le principe est exposé dans ces quelques lignes conduit en effet aux intégrales doubles et à la formule

$$V = \int\int z dx dy.$$

On trouvera dans l'ouvrage de M. Bertrand (*loco cit.*, pp. 423 et 424) deux démonstrations pour établir la formule connue, relative à l'ellipsoïde,

$$V = \frac{4}{3} \pi abc ;$$

mais ces démonstrations, exigeant des notions supérieures d'analyse, ne peuvent servir à résoudre l'exercice proposé.

Il arrive, dans le cas considéré, que l'on sait justement déterminer *à priori* l'aire de la section plane qui sert de base à la couche cylindrique infiniment petite.

Coupons, en effet, l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

par un plan parallèle au plan des xy ; l'ellipse de section a pour axes

$$a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \qquad \text{et} \qquad b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

L'aire de cette courbe est donc

$$\pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

(*) Bertrand (*Calcul intégral*, p. 412).

et nous pouvons écrire

$$dv = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz.$$

Nous déduisons de là

$$v = \pi abz - \frac{\pi ab}{c^2} \int z^2 dz$$

ou

$$v = \pi abz - \frac{\pi ab}{3c^2} z^3.$$

La constante d'intégration est nulle si nous voulons compter le volume de l'ellipsoïde à partir du plan xoy.

Pour $z = c$, nous obtenons le demi-volume de l'ellipsoïde

$$v' = \pi abc - \frac{\pi abc}{3} = \frac{2}{3} \pi abc.$$

Le volume total est donc égal à $\frac{4}{3} \pi abc$.

Remarque. — On peut varier cet exercice en proposant, comme on l'a fait, de *calculer le poids d'un ellipsoïde plein d'un liquide dont la densité varie, en restant proportionnelle à une fonction entière de la côte* z.

On doit alors écrire

$$dP = \varphi(z) dv$$

ou

$$dP = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\varphi(z) dz$$

et finalement

$$\frac{1}{2} P = \int_0^c \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\varphi(z) dz,$$

intégrale qui se trouve immédiatement, puisque $\varphi(z)$ est une fonction entière.

Voici une autre application de la méthode précédente.

Une droite de longueur constante glissant sur deux droites fixes rectangulaires Δ, Δ' non situées dans un même plan, engendre une surface dont l'équation est

$$\frac{x^2}{(c + z)^2} + \frac{y^2}{(c - z)^2} = \operatorname{tg}^2 \gamma.$$

Dans cette équation $2c$ désigne la plus courte distance de Δ et de Δ', γ l'inclinaison de la génératrice mobile sur oz; γ est, pour des raisons évidentes, un angle constant. Les

axes adoptés sont les axes naturels de cette question; oz est la perpendiculaire commune, l'origine est au milieu de cette droite et les axes ox, oy sont parallèles à Δ et à Δ'.

On a dans cet exemple :

$$v = 2\pi \ \mathrm{tg}^2 \gamma \int_0^c (c^2 - z^2)\, dz = \frac{4}{3} \pi c^3 \ \mathrm{tg}^2 \gamma,$$

d'où l'on conclut (Catalan, *Cours d'analyse*, p. 648) que *le volume du corps considéré est les $\frac{2}{3}$ du cylindre de même base et de même hauteur.*

9. — *La série*

$$\frac{1}{l2.l2} + \frac{1}{l3.l3} + \cdots \frac{1}{ln.ln} \cdots \qquad (A)$$

est divergente.

1re Solution. On peut observer que l'égalité

$$u_n = \frac{1}{l(n+1).l(n+1)}$$

donne

$$nu_n = \frac{n}{l(n+1).l(n+1)},$$

ou

$$nu_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{l(n+1).l(n+1)}.$$

Il est facile de reconnaître, par des procédes divers. que

$$\lim \frac{x}{(lx)^2} = \infty, \text{ pour } x = \infty.$$

On peut, par exemple, observer que

$$\frac{x}{(lx)^2} = \left(\frac{\sqrt{x}}{lx}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{lx}\right).$$

En posant

$$x = X^2$$

on a

$$\frac{\sqrt{x}}{lx} = \frac{X}{2lX},$$

et l'on sait que pour $X = \infty$, le rapport $\frac{X}{lX}$ est infini lui-même.

Revenant à la série proposée, il est donc démontré que lim (nu_n) est infini; la série est, par suite, divergente.

2e Solution. Comparons la série (A) à la série de M. Bertrand (*)

$$\frac{1}{2l2} + \frac{1}{3l3} + \dots + \frac{1}{nln} + \dots$$

Cette série est divergente et on démontre, comme l'on sait, cette divergence, en observant que l'on a

$$\frac{1}{2l2} + \left(\frac{1}{3l3} + \frac{1}{4l4}\right) + \left(\frac{1}{5l5} + \dots + \frac{1}{8l8}\right) + \dots$$
$$> \frac{1}{2l2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots \right)$$

Ainsi la série (A), *a fortiori*, est divergente.

La divergence de la série de M. Bertrand peut aussi se démontrer immédiatement en s'appuyant sur le théorème suivant :

La série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ *est convergente ou divergente en même temps que la série* $2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \dots$

10. — *Décomposer en fractions simples l'expression*

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2(x^2-1)}.$$

On sait que l'on a

$$\frac{x}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{C'x+D'}{x^2+1}.$$

En multipliant les deux membres de cette identité, successivement par $x-1$ et $x+1$, puis faisant $x=1$, et ensuite $x=-1$, on trouve immédiatement

$$A = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{8}.$$

(*) Cette série, avec plusieurs autres,

$$\frac{1}{2LL2} + \frac{1}{3LL3} + \dots \text{etc} \dots$$

ont été étudiées par M. Bertrand (*J. de Liouville*, t. VIII). Voyez aussi le *Traité élémentaire des séries* de M. Catalan et ses *Mélanges mathématiques*. Dans cet ouvrage, que la Société royale des Sciences de Liège, à son grand honneur, réédite en ce moment, M. Catalan prouve qu'en supposant $n = 2^{1000}$, *nombre de 302 chiffres!* la somme S_n est inférieure à 11. Résultat bien curieux et qui prouve la divergence extrêmement lente de la série de M. Bertrand.

La seule difficulté *matérielle* porte sur la détermination des coefficients C, D; C', D'.

En observant que l'on a

$$f(x) + f(-x) \equiv 0,$$

on trouve d'abord que

$$\frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} + \frac{C'x + D'}{x^2+1} + \frac{D - Cx}{(x^2+1)^2} + \frac{D' - C'x}{x^2+1} \equiv 0.$$

Cette égalité prouve que D et D' sont nuls; il ne reste plus qu'à déterminer C et C'.

En multipliant par x les deux membres de l'identité :

$$\frac{x}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{\frac{1}{8}}{x-1} + \frac{\frac{1}{8}}{x+1} + \frac{Cx}{(x^2+1)^2} + \frac{C'x}{x^2+1},$$

et en faisant $x = \infty$, on trouve $C' = -\frac{1}{4}$. Enfin, pour déterminer C, on multiplie par $(x^2-1)^2$ et l'on fait $x^2 = -1$; on trouve alors $C = -\frac{1}{2}$. Le résultat final est

$$\frac{x}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{\frac{1}{8}}{x-1} + \frac{\frac{1}{8}}{x+1} - \frac{\frac{x}{4}}{x^2+1} - \frac{\frac{x}{2}}{(x^2+1)^2}.$$

Les artifices de calcul employés dans cette solution ont surtout pour but, en même temps qu'ils abrègent les calculs ordinaires, de montrer la force d'une identité et les réssources variées qu'elle présente.

11. — *Construire la courbe* Γ *qui correspond à l'équation*

$$\rho^3 \sin 3\omega = 1.$$

L'équation cartésienne étant

$$y(3x^2 - y^2) = 1,$$

on voit que Γ est une cubique formée de trois branches hyperboliques ordinaires asymptotes respectivement : 1° à l'axe ox; 2° aux droites, qui, menées par l'origine, font avec ox des angles égaux à $\pm$ 60°.

Γ peut se construire, point par point, en cherchant ses intersections avec les cordes parallèles à ox.

Γ peut aussi se construire tangente par tangente, en observant que l'angle V formé par la demi-tangente positive

au point M, pris sur Γ, avec le prolongement du rayon vecteur oM est lié à l'angle $\omega = Mox$, par la formule

$$V + \omega = \pi.$$

On élève une perpendiculaire au milieu de oM, elle rencontre ox en K; la tangente en M passe par K' symétrique de K par rapport au pied de l'ordonnée qui correspond au point M.

Remarque. — La courbe Γ considérée ci-dessus représente un cas particulier des courbes qui correspondent à l'équation

$$\rho^n \sin n\omega = 1,$$

et ces courbes sont les transformées par rayons vecteurs réciproques des *spirales sinussoïdes*.

Ces spirales, comme l'a fait observer M. Brocard dans ce journal (*), ont fait l'objet de recherches diverses dont on trouvera la nomenclature en se reportant à l'endroit cité.

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (1885)

Cours préparatoires.

I. Trouver le lieu des foyers des paraboles qui touchent deux droites rectangulaires OX, OY, la première en un point fixe A, la deuxième en un point variable B.

II. Une droite de longueur constante AB glisse dans un angle XOY de manière que ses extrémités décrivent respectivement les côtés de l'angle; trouver la position de la droite pour laquelle la surface du triangle AOB a une grandeur déterminée.

Places d'élèves externes.

I. Deux vases cylindriques ayant deux bases dont les surfaces sont S et S' sont mis en communication par un orifice placé à la partie inférieure. Cet orifice a une section σ et la vitesse d'écoulement de l'eau par cet orifice est égale à $\sqrt{2g(z-z')}$, en désignant par z et z' les hauteurs du liquide dans les deux vases au-dessus du plan commun de leurs bases ce qui revient à dire que pendant un élément de temps dt, il s'écoule un volume d'eau, $\sigma \times \sqrt{2g(z-z')} \times dt$. La différence primitive entre les hauteurs de l'eau dans les deux vases étant H, on demande après combien de temps le niveau du liquide dans les deux vases sera devenu le même.

(*) *Journal de math. spéc.*, 1885, pp. 257-258. Voyez aussi, au sujet de ces courbes, une note de M. du Chatenet, *Nouvelles Annales*, mai 1886, p. 223.

II. Dans un triangle on donne deux côtés $a = 2250^m$, $b = 3147^m$ et le rayon du cercle circonscrit $R = 1988^m$. On demande de calculer le troisième côté, les angles et la surface du triangle.

Mécanique.

Un axe vertical XY animé d'un mouvement de rotation uniforme ω porte un système de tiges articulées ABC mobiles dans un plan vertica passant par l'axe et entraîné dans son mouvement de rotation. Deux boules assimilables à des points matériels de masses m et m' sont attachées aux tiges B et C. On demande : 1° d'établir les équations qui déterminent la position d'équilibre du système pour une valeur donnée de ω ; 2° de trouver la valeur de ω pour laquelle la distance CC′ de la boule m' à l'ax serait double de BB′, distance de m au même axe, en supposant $m = m'$. On prendra pour inconnus les angles α et β que font AB et BC avec la verticale; les masses des tiges AB, BC sont supposées négligeables.

ÉCOLE NORMALE (1886)

Mathématiques.

16 juin 1886. — On considère les courbes du troisième degré C, représentées par l'équation

$$x^2y + a^2x = \lambda,$$

où λ désigne un paramètre variable.

On demande de démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce tangentes à une droite quelconque D du plan, ayant pour équation

$$y = mx + p,$$

et de calculer les coordonnées des deux points de contact M et M′. Distinguer les droites D, pour lesquelles ces deux points sont réels, des droites pour lesquelles ils sont imaginaires. Examiner pour quelles positions de la droite D les deux points M et M′ viennent se confondre en un seul, et trouver, dans ce cas, le lieu décrit par le point de contact.

Connaissant les coordonnées (α, β) d'un point de contact M d'une courbe C avec une droite D, trouver les coordonnées (α', β') du second point de contact M′ situé sur D. Construire la courbe décrite par le point M′ lorsque le point M décrit la ligne droite

$$\beta = \alpha - 2a.$$

CONCOURS GÉNÉRAL (1886).

I. — Étant donnée une surface du second ordre S et deux points A, B; on mène par B une sécante qui rencontre la surface S aux points C, C′ et le plan polaire du point A au point D.

Soient M et M′ les points où la droite AD rencontre les plans, qui touchent la surface S aux points C et C′.



La sécante BD tournant autour du point B, on demande le lieu décrit par les points M et M'.

II. Ce lieu se compose de deux surfaces du second ordre dont l'une est indépendante de la position occupée par le point B dans l'espace et dont l'autre Σ dépend de la position de ce point.

Chercher ce que devient Σ quand, dans la construction qui donne les points de cette surface, on fait jouer au point A le rôle du point B et inversement.

III. Le point A restant fixe, déterminer les positions occupées par le point B quand la surface Σ n'a pas un centre unique à distance finie.

QUESTIONS PROPOSÉES

198. — Étant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy et une droite D, on considère un angle mobile dont le sommet décrit la droite D et dont les côtés j et j' enveloppent respectivement des coniques C et C' ayant chacune le point O pour foyer et la droite D pour directrice. Démontrer que les droites qui joignent les points d'intersection des droites j et j' avec les axes Ox et Oy enveloppent des coniques bitangentes aux coniques C et C'. *(D'Ocagne.)*

199. — Sur les trois côtés d'un triangle, et en leurs milieux, on leur élève des perpendiculaires; si l'on porte sur ces perpendiculaires des longueurs proportionnelles à ces côtés et que l'on joigne les extrémités de ces segments respectivement aux sommets opposés du triangle, les trois lignes ainsi obtenues sont concourantes en un point M.

1° Démontrer que le lieu du point M quand k varie, est une hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC.

2° Déterminer la valeur de k pour laquelle les trois droites précédentes sont parallèles. *(Boutin.)*

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13838-6.

SUR UNE CUBIQUE REMARQUABLE

DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. **Kœhler.**

Pour faciliter la lecture de cette note, je rappellerai d'abord quelques théorèmes relatifs à la génération des cubiques :

1° *Étant donnés un faisceau de coniques passant par quatre points* a, b, c, d *et le faisceau des polaires d'un point* p, *le lieu des points d'intersection des coniques et de leurs polaires est une cubique passant par* a, b, c, d, p *et par le point de concours* p′ *des polaires de* p.

Cela résulte immédiatement de ce que les deux faisceaux sont en correspondance anharmonique, suivant l'expression de Chasles.

2° *Les droites* pa, pb, pc, pd *sont les tangentes à la cubique en* a, b, c, d, *et la droite* pp′ *est la tangente en* p, *ou, en d'autres termes,* p′ *est le tangentiel de* p.

En effet, pour trouver les points de la courbe situés sur une transversale quelconque menée par *p*, il suffit évidemment de construire les deux coniques du faisceau qui touchent cette transversale; les points cherchés sont les deux points de contact, c'est-à-dire les points doubles de l'involution déterminée sur la transversale par le faisceau (*abcd*). Si la transversale passe en *a*, les deux points doubles se confondent avec ce point, et la transversale devient tangente. On voit ensuite que la conique *abcdp* touche en *p* la droite *pp′*; il en est de même pour la cubique.

3° *Les points de concours* f, g, h *des couples de droites* (ac, bd), (ab, cd), (ad, bc) *appartiennent aussi à la cubique, et les tangentes en ces points sont les droites* p′f, p′g, p′h.

Car les couples de droites (*ac*, *bd*)... sont des coniques du faisceau et les polaires de *p* sont *p′f*, *p′g*, *p′h*; d'ailleurs

chacune de ces polaires coupe la conique correspondante en deux points coufondus. On a ainsi le faisceau des quatre tangentes menées à la cubique du point p'; ce sont les droites $p'f$, $p'g$, $p'h$, $p'p$. Il est évident que la tangente en p' n'est autre chose que la tangente à la conique $pfghp'$ et c'est en même temps la polaire de p par rapport à la conique $abcdp'$. Les deux coniques $abcdp$, $pfghp'$ sont, par rapport à la cubique, les premières polaires de p, p' (*).

Ces préliminaires étant posés, je considère un triangle ABC, et, pour me conformer aux notations adoptés dans plusieurs

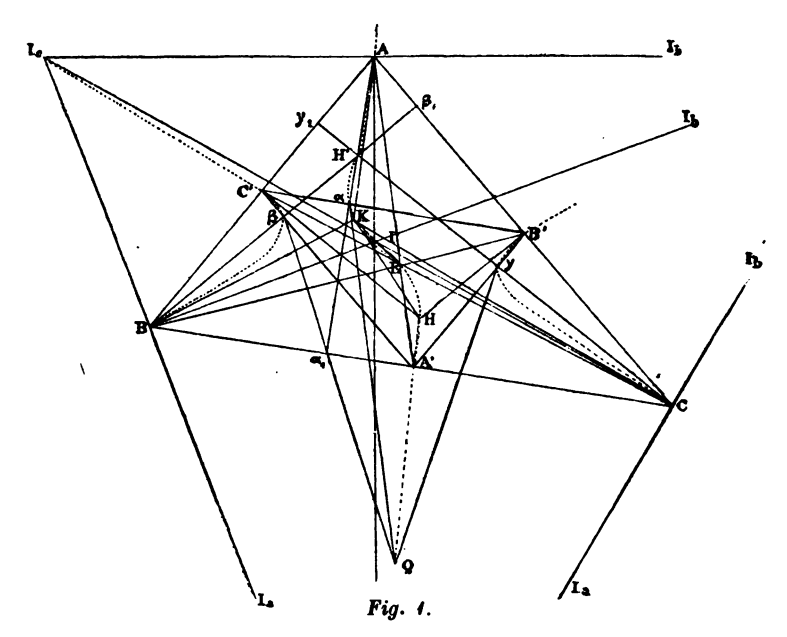


Fig. 1.

articles de ce Journal par M. Brocard et d'autres géomètres, je désignerai par les lettres E, H, H', K le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le point de Lemoine. Soient, en outre, A', B', C' les milieux des côtés BC, CA, AB; α_1, β_1, γ_1 les pieds des hauteurs, α, β, γ

(*) Pour plus de détails à ce sujet, voir mon *Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre* (*Nouvelles Annales*, t. XI, 1872.)

leurs milieux; enfin I, I_a. I_b, I_c les centres du cercle inscrit et des trois cercles exinscrits.

L'application des principes rappelés ci-dessus permet de reconnaître que les dix-sept points A, B, C, A', B', C', α, β, γ, E, H, H', K, I, I_a, I_b, I_c, appartiennent à une même cubique. Cette propriété et plusieurs autres peuvent être mises en évidence en engendrant la cubique dont il s'agit de trois manières différentes.

Premier mode de génération. — Je considère la cubique engendrée par les intersections du faisceau de coniques déterminé par les sommets du triangle et par le centre de gravité E, avec les polaires du point de Lemoine K par rapport à ces coniques (*fig. 1*). Le point de concours des polaires de K est le centre H du cercle circonscrit. En effet, la polaire de K par rapport à la conique formée du couple de droites (AC, BE) est la droite HB' passant par le milieu B' de CA et perpendiculaire à ce côté, puisque la hauteur $B\beta_1$ du triangle est partagée en deux parties égales par B'K, B'E, B'C, d'après une propriété bien connue du point de Lemoine; autrement dit, la perpendiculaire B'H à AC est conjuguée harmonique de B'K par rapport aux droites B'C, B'B qui constituent la conique. De même C'H, A'H sont les polaires de K par rapport aux couples (AB, CE), (BC, AE).

On conclut de ces remarques que la cubique engendrée par les deux faisceaux passe en A, B, C, E, H, K que la tangente en K est la droite KH, et que les tangentes en A, B, C, sont les médianes antiparallèles. La courbe passe aussi par les milieux A', B', C' des côtés, et les tangentes en ces points sont A'H, B'H, C'H; elle coupe donc normalement les côtés en leurs milieux.

A la conique du faisceau (ABCE) qui touche EK en E correspond la polaire HEH'; mais cette conique n'est autre chose que l'hyperbole des neuf points signalée par MM. Kiepert et Brocard; on sait que le point K est le pôle de la droite HEH' par rapport à cette hyperbole équilatère (voir *Journal de Mathématiques spéciales,* 1885, p. 31). Donc l'orthocentre H'

est un point de la cubique. Je démontrerai ce fait un peu plus loin d'une autre manière.

Deuxième mode de génération. — Je construis la cubique engendrée par le faisceau des coniques ($II_aI_bI_c$) et par le faisceau des polaires du point E.

Il est facile de voir que les deux bissectrices de l'angle A sont conjuguées harmoniques par rapport à la médiane AA' et à la médiane antiparallèle AK. D'après cela, les polaires de E par rapport aux coniques du faisceau qui sont constituées par les trois couples de bissectrices des angles A, B, C, sont précisément les médianes antiparallèles, et K est le point de concours de toutes les polaires. Ainsi la nouvelle cubique passe en A, B, C, E, K; les tangentes en A, B, C sont AK, BK, CK, comme pour la première; la tangente en E est EK, enfin la tangente en K est la tangente à la conique du faisceau qui passe par ce point K; c'est donc KH. Nous avons ainsi deux cubiques ayant cinq points communs avec les mêmes tangentes, et par suite, elles coïncident. Ajoutons que les tangentes aux points I, I_a, I_b, I_c sont les droites EI, EI_a, ...

Troisième mode de génération. — Je prends pour base du faisceau de coniques (A'B'C'K) et pour pôle le point H. Les tangentes en A', B', C', K à la cubique ainsi obtenue seront encore les roites A'H, B'H, C'H, KE. La tangente en H à la cubique donnée par le premier mode de génération, est la tangente à la conique HA'B'C'K; d'après le mode de génération actuel, c'est la polaire de H par rapport à cette même conique; ainsi les deux tangentes coïncident.

Les deux cubiques ont encore cinq points communs et cinq tangentes communes en ces points, et elles se confondent.

Les milieux α, β, γ des hauteurs du triangle appartiennent à la cubique, car ce sont les points de concours des couples de droites (B'C', A'K), (C'A', B'K), (A'B', C'K) qui font partie du faisceau de coniques (A'B'C'K). Les tangentes en ces points sont les droites qui les joignent au point de concours Q des polaires de H par rapport à toutes les coniques de ce faisceau. Ce point Q, facile à construire avec la règle seule,

est le tangentiel de H; ses distances aux côtés du triangle sont proportionnelles à

$$\frac{\cos A \sin B \sin C}{\cos A - \cos B \cos C}, \quad \frac{\cos B \sin C \sin A}{\cos B - \cos C \cos A}, \quad \frac{\cos C \sin A \sin B}{\cos C - \cos A \cos B}.$$

J'ai dis plus haut que la cubique passait par l'orthocentre H', et je me suis appuyé sur ce que la droite HEH' est la polaire de K par rapport à l'hyperbole des neuf points. Voici comment on peut arriver directement au même résultat, en partant du troisième mode de génération que j'ai considéré.

Les points de la courbe situés sur la transversale HEH'

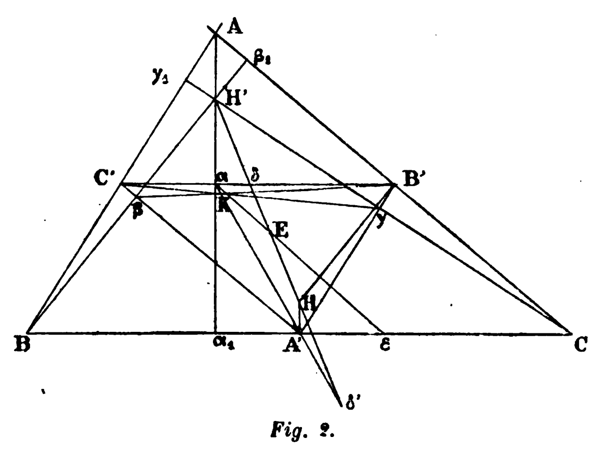


Fig. 2.

sont les points de contact des deux coniques du faisceau (A'B'C'K) qui touchent cette transversale, ou les points doubles de l'involution déterminée par les coniques du faisceau. Soit en particulier la conique (B'C', A'Kα) qui rencontre la transversale en δ, δ'; *(fig. 2)* il est aisé de voir que EH' divise harmoniquement le segment $\delta\delta'$. En effet, prolongeons αE jusqu'à la rencontre de BC en ε; on aura $\alpha_1 A' = A'\varepsilon$, car $\varepsilon C = 2C'\alpha = B\alpha_1$, et, comme A' est le milieu de BC, ce point est aussi le milieu de $\alpha_1\varepsilon$. Il résulte de là que le faisceau de rayons $\alpha(E\delta\alpha_1 A')$ est harmonique, puisque la parallèle au rayon $\alpha\delta$ menée par A' est divisée en deux parties égales par αE, $\alpha\alpha_1$; les quatre points E, δ, H', δ' où le faisceau $\alpha(E\delta\alpha_1 A')$ coupe la droite HEH' sont donc harmoniques.

De même les points E, H′ divisent harmoniquement les segments déterminés sur HEH′ par les deux autres couples de droites (C′A′, B′β), (A′B′, C′γ) qui font partie du faisceau de coniques (A′B′C′K). Donc enfin E, H′ sont les points doubles de l'involution, et ils appartiennent tous deux à la cubique.

En résumant tout ce qui précède, on peut énoncer les théorèmes suivants :

1° *Les sommets d'un triangle, les milieux des côtés, les milieux des hauteurs, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, l'orthocentre, le point de Lemoine, les centres des quatre cercles tangents aux côtés sont situés sur une même cubique;*

2° *Les tangentes à la courbe aux sommets du triangle sont les médianes antiparallèles.*

3° *Les tangentes aux points* I, I_a, I_b, I_c *se coupent au centre de gravité.*

4° *Le point de Lemoine est le tangentiel du centre de gravité; le centre du cercle circonscrit est le tangentiel du point de Lemoine.*

5° *Les tangentes aux points* A′, B′, C′, *milieux des côtés, sont les perpendiculaires aux côtés.*

6° *Les tangentes aux points* α, β, γ, *milieux des hauteurs, passent par le tangentiel* Q *du centre du cercle circonscrit, dix-huitième point de la courbe dont j'ai indiqué la construction.*

J'ai signalé dans mes *Exercices de géométrie analytique* (p. 195, 196), la cubique dont je viens de présenter une étude sommaire, et qui pourrait être appelée *cubique des dix-sept points.* Son équation en coordonnées trilinéaires est

$$bcx(y^2 - z^2) + cay(z^2 - x^2) + abz(x^2 - y^2) = 0$$

a, b, c étant les longueurs des côtés du triangle.

Si de chaque point de la courbe, comme centre, on décrit deux coniques, l'une circonscrite, l'autre inscrite au triangle, les normales à la conique circonscrite, aux trois sommets, se coupent en un même point, et il en est de même pour les normales à la conique inscrite aux points où elle touche les côtés; de plus, les axes des deux coniques inscrite et circonscrite ont les mêmes directions. Enfin, le lieu des points de concours des normales est une autre cubique qui coupe la première aux neuf points A, B, C, H, H′, I, I_a, I_b, I_c.

Nota. — La cubique en question a été également rencontrée par M. Vigarié qui en avait fait l'objet d'une question qu'il comptait proposer dans ce journal. Depuis, M. Vigarié a trouvé une origine, relativement ancienne, à cette cubique remarquable. Thomson a proposé sa recherche dans l'*Educational Times* (août 1864). Elle a été reprise dans les *Nouvelles Annales* (1865, p. 144). et résolue (*loc. cit.* p. 469). Thomson n'indique pas que la cubique en question passe par le centre du cercle circonscrit et par le point de Lemoine, mais il signale tous les autres points.

Pour la seconde cubique signalée à la fin du présent article le lecteur pourra consulter une note bibliographique placée à la suite de la solution de la question 114, solution publiée dans le présent numéro. G. L.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

TOUTE ÉQUATION ALGÉBRIQUE A UNE RACINE

Par M. **Porchon,** professeur au Lycée de Versailles.

(*Suite*, voir p. 154.)

Démonstration du théorème de d'Alembert. — Considérons maintenant une équation algébrique de degré m, à coefficients réels ou imaginaires, et que nous écrirons en mettant en évidence le module et l'argument de chaque coefficient,

$$x^m + A_{m-1}(\cos\alpha_{m-1} + i\sin\alpha_{m-1})x^{m-1}\ldots + A_0(\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0) = 0. \quad (1)$$

Posons $x = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ρ désignant une quantité positive et φ un arc réel. L'équation devient

$$\rho^m\cos m\varphi + A_{m-1}\rho^{m-1}\cos[\alpha_{m-1} + (m-1)\varphi]\ldots + A_0\cos\alpha_0 \quad (2)$$
$$i + \left\{\rho^m\sin m\varphi + A_{m-1}\rho^{m-1}\sin[\alpha_{m-1} + (m-1)\varphi]\ldots + A_0\sin\alpha_0\right\} = 0,$$

Nous désignerons la partie réelle et le coefficient de i respectivement par $F(\rho, \varphi)$, $G(\rho, \varphi)$, en sorte que l'équation

s'écrira

$$F(\rho, \varphi) + iG(\rho, \varphi) = 0. \qquad (3)$$

Il est clair que les fonctions F et G sont continues. Lorsque ρ a une valeur suffisamment grande, chacune de ces fonctions prend le signe de son premier terme, pourvu qu'il ne soit pas nul. Le premier terme de F, et par suite F change de signe quand on substitue à φ deux valeurs de forme $(2K + 1)\frac{\pi}{2m} \pm \omega$, K désignant un nombre entier, et ω une quantité réelle très petite. Il en est de même de G quand on substitue $2K\frac{\pi}{2m} \pm \omega$. Donc F et G respectivement ont au moins une racine de première espèce dans chaque petit intervalle compris entre les deux substitutions. Cela fait pour chacune $2m$ racines comprises entre zéro et 2π, limites auxquelles on peut se borner, puisque l'on tombe sur des arcs ayant pour différence une circonférence lorsqu'on donne à K deux valeurs différant de $2m$.

Mais, quel que soit ρ, chaque fonction ne peut jamais avoir plus de $2m$ racines. En effet, le système d'équations :

$$F(\rho, \varphi) = 0, \qquad \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1,$$

dont l'une est du degré m et l'autre du deuxième degré par rapport à $\sin \varphi$ et à $\cos \varphi$, a, au plus, $2m$ solutions. Ainsi, lorsque ρ est très grand, chaque fonction a une racine et une seule dans chacun des intervalles considérés, et n'en a aucune autre.

Observons de plus que deux racines consécutives de F, substituées dans G, donnent alors des résultats de signes contraires, et *vice versa*. Donc, si l'on range par ordre de grandeur croissante toutes les racines de F et de G indistinctement, celles de F alternent régulièrement avec celles de G.

En d'autres termes, lorsque ρ est très grand, le produit FG a $4m$ racines (non congrues suivant le module 2π) savoir $2m$ racines de F et $2m$ de G, les secondes alternant régulièrement avec les premières.

Maintenant si l'on fait $\rho = 0$, les fonctions F et G se réduisent à $A_0 \cos \alpha_0$ et $A_0 \sin \alpha_0$. Elles ne sont pas nulles ensemble, à moins que A_0 ne soit nul, auquel cas le théo-

rème est évident. Si, par exemple, cos α_0 n'est pas nul, la fonction F n'a plus de racines quand ρ est nul. Donc le produit FG n'a plus alors $4m$ racines. Il s'ensuit que, pour certaines valeurs intermédiaires de ρ, ce produit a des racines égales.

Alors de deux choses l'une : ou une racine de F se confond avec une de G, et le théorème est démontré; ou deux racines soit de F, soit de G, sont égales. Mais puisque ces racines alternent lorsque ρ est très grand, cette égalité ne peut se produire sans qu'une racine de F soit venue d'abord se confondre avec une de G. Ainsi il faut que pour une certaine valeur de ρ, F et G soient nuls ensemble. C. Q. F. D.

Remarque. — Ce raisonnement prouve même que l'équation a m racines. Considérons en effet les changements de signe que subit le produit FG lorsque, φ croissant, F passe par zéro. Appelons les racines de F *ascendantes* ou *descendantes* suivant que ce changement de signe est du négatif au positif, ou inversement. Convenons de dire que deux racines consécutives de F forment une permanence ou une variation suivant qu'elles sont, à ce point de vue, de même nature ou de nature contraire.

Il y a permanence ou variation suivant que les deux racines de F comprennent un nombre pair ou un nombre impair de racines de G. Si donc des racines de G viennent apparaître ou disparaître entre deux de F, comme elles le font en nombre pair, le nombre de permanences n'en est pas altéré. Il en est de même si des racines de F apparaissent ou disparaissent entre deux racines de G : car leur série ne présente que des variations.

Ainsi pour que le nombre des permanences s'altère, il est nécessaire (et non suffisant) qu'une racine de F et une de G s'intervertissent en devenant d'abord égales. Ce fait change la nature d'une racine; si elle est entre deux racines de même nature, le nombre des permanences diminue ou augmente de 2; autrement, il n'est pas altéré (*).

(*) Le nombres des permanences peut encore varier lorsque deux racines de F (ou de G) disparaissent en tendant d'abord vers une racine de G (ou de F) comprise entre elles. Mais ce cas particulier peut être considéré comme une limite du cas général.

Cela posé, lorsque ρ est très grand, le nombre des permanences formées par chacune des $2m$ racines de F et la suivante est $2m$, ces racines étant toutes ascendantes (pour avoir $2m$ intervalles, nous considérons les racines comme rangées en cercle). Lorsque ρ est nul, ce nombre se réduit à zéro. Donc il a varié de $2m$, c'est-à-dire que les fonctions F et G ont m fois une racine commune lorsque ρ décroit de l'infini à zéro.

Il est clair que plusieurs racines de G peuvent tendre en même temps vers des racines de F; il faudra alors considérer l'équation (1) comme ayant des racines multiples. Nous omettrons d'examiner ce cas en détail.

Corollaire. — *Lorsque ρ décroît, le nombre des permanences des racines de* F *(ou de* G*) n'augmente jamais. Lorsqu'une racine de* G *tend vers une racine de* F, *celle-ci est toujours suivie et précédée immédiatement de racines de même nature que la sienne. Car autrement l'équation* (1) *aurait plus de* m *racines.*

On démontre aisément, de plus, que cette racine de F est toujours ascendante, et qu'elle est suivie et précédée immédiatement de racines ascendantes. F n'a jamais deux racines descendantes consécutives.

NOTE SUR LA STROPHOIDE

Par M. **Lebel**, maître répétiteur au Lycée de Nice.

(*Suite et fin*, voir p. 147.)

---

7. — Les remarques précédentes fournissent le moyen de construire facilement la tangente en un point M_1 d'une strophoïde.

Conservons les mêmes notations que précédemment. On construira le point M_2 qui est le symétrique par rapport à Ox du deuxième point M_3 situé sur la transversale AM_1. On joindra M_1M_2 et l'on décrira de O comme centre un cercle

tangent à M_1M_2. La deuxième tangente menée de M_1 à ce cercle est la tangente cherchée. On obtient en même temps la tangente au point M_2 et la tangente symétrique au point M_3.

8. — On peut aussi se proposer, étant donné le point P, de construire les tangentes PM_1PM_2. On obtiendra le point N par la même construction qui a servi à déterminer le point M_2; les droites PM_1 PM_2 sont les tangentes menées de P au cercle de rayon ON. Les points de contact sur la strophoïde sont déterminés par la droite M_1M_2 tangente au point N au cercle O.

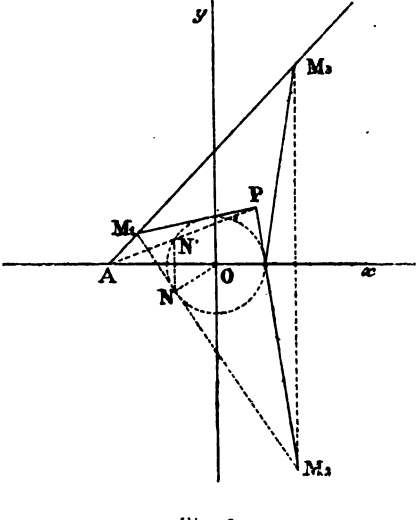


Fig. 2.

9. — Quelques considérations sur le cercle circonscrit au triangle M_1PM_2 permettent d'arriver aux mêmes résultats par une autre voie.

Le sommet A de la strophoïde et les trois sommets du triangle M_1PM_2 sont sur un même cercle.

Soit

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y - a(a + 2x_0) = 0$$

l'équation d'un cercle passant par le point A. Formons une combinaison homogène de cette équation et de celle de la strophoïde, puis posons $\frac{y}{x} = t$, et écartons la racine nulle correspondant au point A; il vient finalement :

$$t^3 - 2\frac{y_0}{a}t^2 - \left(3 + 4\frac{x_0}{a}\right)t + 2\frac{y_0}{a} = 0. \qquad (14)$$

Supposons que ce cercle passe par les points M_1 M_2 et calculons la racine τ de l'équation (14) correspondant au qua-

trième point d'intersection du cercle et de la strophoïde.

Écrivons les relations :

$$\tau + (t_1 + t_2) = 2\frac{y_0}{a},$$

$$(t_1 + t_2)\tau + t_1 t_2 = -\left(3 + 4\frac{x_0}{a}\right),$$

$$\tau t_1 t_2 = -2\frac{y_0}{a},$$

qui deviennent

$$\tau - 2\theta = \frac{2y_0}{a},$$

$$1 - 2\theta\tau = -\left(3 + 4\frac{x_0}{a}\right),$$

$$\tau = -2\frac{y_0}{a}.$$

Ajoutons la première et la troisième ; il vient

$$\tau = \theta.$$

Le cercle passe donc par le point P ; les coordonnées de son centre sont

$$x_0 = \frac{a}{2}\left(\theta^2 - 2\right),$$

$$y_0 = -\frac{a}{2}\theta.$$

Si on élimine θ, on trouve pour le lieu du centre C la parabole

$$y^2 = \frac{a}{2}\left(x + a\right).$$

L'équation du cercle C devient

$$x^2 + y^2 - a(\theta^2 - 2)x + a\theta y - a^2(\theta^2 - 1) = 0.$$

Faisons dans cette équation $x = -a$, il vient

$$y^2 + a\theta y = 0.$$

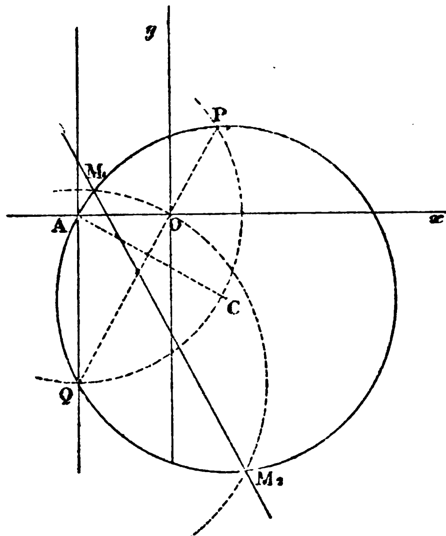


Fig. 3.

Ce cercle rencontre la tangente en A à la strophoïde en un point Q dont l'ordon-

née est égal à $-a\theta$, c'est-à-dire au même point que le prolongement de OP.

La droite AC a pour coefficient angulaire

$$\frac{-\frac{a}{2}\theta}{a+\frac{a}{2}(\theta^2-2)}=-\frac{1}{\theta}.$$

Elle est donc perpendiculaire à OP ; il en résulte que

$$AP = AQ.$$

Les relations (3) et (5) dans lesquelles on remplace $t't''t'''$ par $t_1t_2t_3$, c'est-à-dire par leurs valeurs en fonction de θ, déterminent u et v, et par suite l'équation de M_1M_2.

$$\theta^2x+\theta y-a(\theta^2-1)=0.$$

On peut considérer cette droite comme étant l'axe radical des deux cercles

$$x^2+y^2-a(\theta^2-2)x+a\theta y-a^2(\theta^2-1)=0,$$
$$x^2+y^2+2ax+2a\theta y=0.$$

Le premier est le cercle C; le deuxième est le cercle décrit de Q comme centra avec QO pour rayon.

10. Constructions. — 1° Si on se donne le point P, on trouvera les points M_1M_2 en construisant les deux cercles C et Q, comme l'indique suffisamment la figure. On détermine ainsi les deux tangentes PM_1 PM_2 menées de P à la courbe.

2° Pour obtenir la tangente en un point M_1 de la strophoïde, il suffit de déterminer le point Q sur AQ par une perpendiculaire élevée sur le milieu de OM_1. Comme AP = AQ, le point P sera donné par l'intersection de OQ et du cercle décrit de A comme centre avec AQ pour rayon. PM_1 est la tangente demandée.

11. Remarque. — La construction de la tangente en un point d'une strophoïde, telle que nous l'avons exposée, est une application naturelle des remarques qui ont été faites et on pourrait l'utiliser si l'on n'avait pas déjà des constructions plus simples et plus précises. Mais, en particulier, la méthode des transversales réciproques, exposée dans le traité de géo-

métrie analytique de M. de Longchamps, fournit un moyen beaucoup plus rapide d'obtenir cette tangente.

12. — Enfin, proposons nous de chercher le lieu décrit par le centre de gravité ω du triangle M_1PM_2, lorsque P se déplace sur la courbe.

Le pied K de la médiane issue de P est sur Oy, puisque les points M_1 et M_2 sont équidistants de Oy. En faisant $x = 0$ dans l'équation de M_1M_2 on trouve

$$OK = -a\frac{\theta^2 - 1}{\theta}.$$

Les coordonnées de P sont

$$a\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1} \qquad a\frac{\theta(\theta^2 - 1)}{\theta^2 + 1}.$$

Le segment $K\omega$ est le tiers du segment KP, ce qui donne pour les coordonnées de ω

$$x = \frac{a}{3}\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1},$$

$$y = \frac{a}{3}\left[\frac{\theta(\theta^2 - 1)}{\theta^2 + 1} - \frac{\theta^2 - 1}{\theta}\right]$$

ou

$$y = \frac{a}{3}\left[\frac{\theta^2(\theta^2 - 1) - (\theta^2 + 1)(\theta^2 - 1)}{\theta(\theta^2 + 1)}\right] = -\frac{a}{3}\frac{\theta^2 - 1}{\theta(\theta^2 + 1)}.$$

On voit déjà que

$$y = -\frac{1}{\theta}x,$$

$O\omega$ *est perpendiculaire sur* OP. Remplaçons θ par $-\frac{x}{y}$ dans l'expression de y ; il vient pour l'équation du lieu

$$(x^2 + y^2)x - \frac{a}{3}(x^2 - y^2) = 0.$$

C'est une strophoïde homothétique inverse de la première, par rapport au point double.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 158.)

101. — On peut obtenir l'équation des cubiques circulaires unicursales sous une forme plus simple de la manière suivante.

Prenons un rectangle OABC, puis O et O″ étant deux points fixes, effectuons le tracé 1, 2, 3, lequel, au fond est identique au précédent.

En projetant sur la direction OI les contours brisés OCO″, OIMO″, on a immédiatement

$$\rho + \frac{h-b}{\sin\omega} = a\cos\omega + h\sin\omega,$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

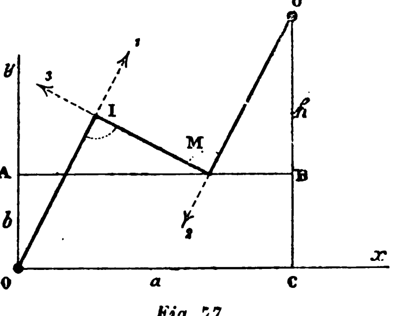


Fig. 77.

$$y(x^2+y^2) = (b-h)x^2 + by^2 + axy.$$

Si nous supposons que nous ayions

$$b = h - b, \quad \text{ou} \quad h = 2b,$$

les tangentes au nœud sont rectangulaires et le lieu décrit par le point I est une strophoïde.

Cherchons à vérifier directement ce fait. Supposons donc que le point O″ (*fig. 78*) soit tellement placé que O″B = BC; alors la droite OO″ coupe AB au point K en deux parties égales. D'ailleurs les triangles OAH, O″BM étant égaux, nous avons AH = MB et, par suite, HK = KM.

La droite IK joint donc le sommet d'un triangle rectangle

au milieu de l'hypothénuse; par conséquent le triangle IKH est isocèle. Mais alors ILO, lui aussi, est isocèle et l'on peut considérer le point I comme décrivant une strophoïde dans

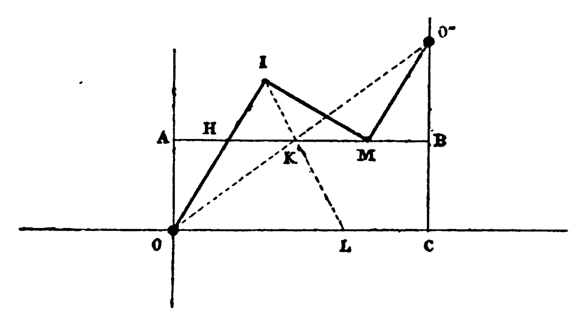


Fig. 78.

les conditions suivantes : les points K et O sont fixes, et, sur la transversale mobile IKL, rencontrant en L la droite fixe OC, on prend, à chaque instant, LI = LO.

Nous allons indiquer maintenant une construction qui est une application très particulière de la transformation conchoïdale des courbes que nous avons développée ailleurs; cette construction nous conduira, et c'est le principal intérêt qu'elle présente, à la détermination, tangente par tangente, des cubiques circulaires unicursales. Il convient d'observer comme on va le vérifier d'ailleurs, qu'elle n'exige, comme tous les tracées que nous exposons dans cet ouvrage, que l'emploi de la règle et de l'équerre; mais elle est singulièrement simplifiée si l'on s'accorde l'usage du compas à pointes sèches, instrument qui permet de déplacer, dans une épure, la position d'une longueur donnée, sans pourtant faire usage des arcs de cercles.

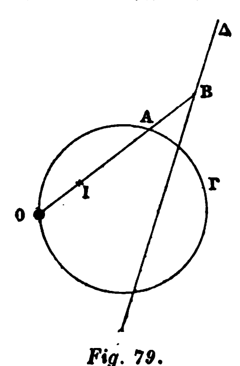


Fig. 79.

102. Tracé normal des cubiques circulaires unicursales. — Les cubiques que nous étudions ici peuvent être considérés comme des conchoïdales, courbes transformées de la droite et du cercle d'après la définition suivante.

Soient une droite Δ, un cercle Γ et un point O sur Γ ; par O menons une transversale OAB et prenons OI = AB ; il est facile de vérifier que le lieu décrit par le point I est une cubique circulaire unicursale. On obtient la strophoïde en prenant pour Δ une droite passant par le centre de Γ.

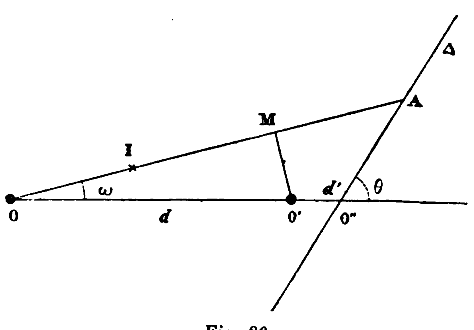


Fig. 80.

Mais voici comment, le tracé du cercle Γ n'étant pas accordé, on peut réaliser la construction précédente.

Imaginons une droite Δ et deux points quelconques O, O' ; par O' menons une droite mobile O'M et du point O abaissons une perpendiculaire OM ; enfin, prenons OI = AB. Le lieu du point I est une cubique circulaire unicursale.

Nous avons en effet $\quad \mathrm{OM} = d \cos \omega,$

et
$$\mathrm{OA} = \frac{(d + d') \sin \theta}{\sin (\theta - \omega)}.$$

Finalement, l'équation polaire du lieu décrit par I est
$$\rho = \frac{(d + d) \sin \theta}{\sin (\theta - \omega)} - d \cos \omega$$

ou, en coordonnées cartésiennes,
$$(x^2 + y^2)(x \sin \theta - y \cos \theta) = x^2 d' \sin \theta + y^2 (d + d') \sin \theta + d\, xy \cos \theta.$$

Cette égalité représente une strophoïde quand on a
$$d + 2 d' = 0,$$
c'est-à-dire lorsque Δ passe par le milieu de OO'.

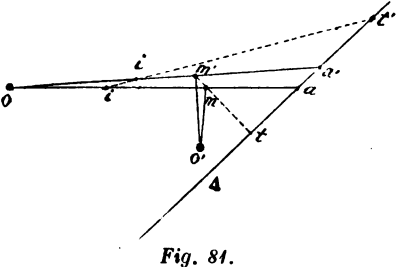


Fig. 81.

103. Tracé de la tangente. — Comme nous l'avons annoncé tout-à-l'heure cette construction, point par point, des cubiques

circulaires unicursales permet de les déterminer, tangente par tangente, comme nous allons l'indiquer.

Considérons deux positions infiniment voisines de la construction que nous venons d'indiquer. Dans le triangle oaa', nous pouvons considérer ii' et mm' comme deux transversales réciproques, de telle sorte que les points t et t' sont isotomiques sur aa'.

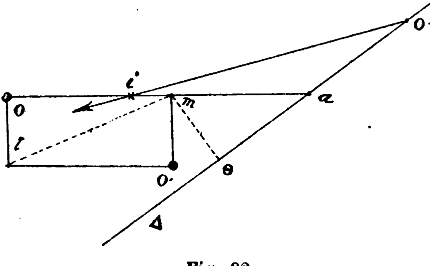


Fig. 82.

En passant à la limite on est conduit par ces considérations au tracé indiqué par la figure.

Dans cette construction : $oo'ml$ est un rectangle, $m\theta$ est perpendiculaire sur ml et on a pris $a\theta' = \theta a$. La droite $\theta' i$ est la tangente cherchée. *(A suivre).*

QUESTION 114

Solution par M. Taratte, élève de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

Parmi toutes les coniques circonscrites à un même triangle ABC, *on considère seulement la série de celles pour chacune desquelles les normales en* A, B, C *sont concourantes, et l'on demande le lieu du point de concours.* (E. V.)

Prenons pour axe des x le côté BC et pour axe des y la hauteur correspondante. Soient b, c les abcisses des points B et C et a l'ordonnée du point A, l'équation générale des coniques circonscrites au triangle est

$$Ay\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1\right) + By\left(\frac{x}{b} + \frac{y}{a} - 1\right)$$
$$+ D\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1\right)\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1\right) = 0.$$

Soient x, y les coordonnées d'un point du lieu, exprimons que les normales en A, B, C passent par ce point, nous aurons les relations

$$\frac{bcx}{a(\mathrm{A}b + \mathrm{B}c)} = \frac{y - a}{\mathrm{A} + \mathrm{B}}$$
$$\frac{b(x - b)}{\mathrm{D}} = \frac{ay}{\mathrm{A}a + \mathrm{D}}$$
$$\frac{c(x - c)}{\mathrm{D}} = \frac{ay}{\mathrm{B}a + \mathrm{D}}.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer A, B, D entre ces trois équations. On peut les écrire

$$\mathrm{A}[ab(y - a) - bcx] = \mathrm{B}[bcx - ac(y - a)],$$
$$\mathrm{D}[ay - b(x - b)] = \mathrm{A}ab(x - b),$$
$$\mathrm{B}ac(x - c) = \mathrm{D}[ay - c(x - c)]$$

Multiplions membre à membre et nous aurons l'équation du lieu

$$(cx - ay + a^2)(bx - ay - b^2)(x - c)$$
$$+ (bx - ay + a^2)(cx - ay - c^2)(x - b) = 0.$$

On a immédiatement des points du lieu par les intersections des droites :

$$cx - ay + a^2 = 0, \quad bx - ay - b^2 = 0, \quad x - c = 0$$

avec les droites

$$bx - ay + a^2 = 0, \quad cx - ay - c^2 = 0, \quad x - b = 0.$$

Ces droites sont les perpendiculaires élevées en chaque sommet sur les côtés qui y aboutissent.

On pourrait *à priori* trouver des points de la courbe. Il y a d'abord les trois sommets du triangle; par exemple, le sommet A; car, parmi les coniques considérées, il y en a une qui a pour normales en B et C les droites AB et AC, le point A est donc le point de rencontre de trois normales.

Consdérons les perpendiculaires en B et C aux côtés AB et AC; ces droites se coupent en un point M qui appartient à la courbe : en effet, les droites MB, MC, MA sont trois normales à la conique formée par les droites AB et AC. Il est d'ailleurs évident que la courbe passe par le centre du cercle circonscrit au triangle et on voit facilement qu'elle est symétrique par rapport à ce point.

ASYMPTOTES. — On voit à l'inspection de l'équation qu'une des asymptotes est la droite

$$x = \frac{b + c}{2},$$

c'est-à-dire la perpendiculaire élevée au milieu de AB. Comme rien ne distingue les côtés du triangle, les autres asymptotes sont les perpendiculaires élevée sur les milieux des deux autres côtés.

CAS PARTICULIERS. — 1° $c = b$, le triangle est isocèle, AB = BC. L'équation du lieu se décompose et l'on a

$$x = 0. \quad \text{et} \quad b^2x^2 - a^2y^2 + a(a^2 - b^2)y - b^4 = 0.$$

La première donne la hauteur relative au côté BC; l'autre représente une hyperbole, ayant pour centre le centre du cercle circonscrit au triangle et pour asymptotes les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés égaux.

2° Si le triangle est équilatéral le lieu se réduit aux trois hauteurs.

NOTA. — Nous avons reçu d'autres solutions de cette question, mais elles renferment toutes des inexactitudes graves et elles sont encore plus incomplètes que la précédente.

Pour perfectionner celle-ci, on peut ajouter aux résultats signalés les remarques suivantes :

1° La courbe passe par l'orthocentre H ;

2° Par le centre du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits ;

3° Elle coupe les côtés du triangle ABC, par exemple BC en un point A′ lequel s'obtient en joignant le milieu M′ de BC à H et en menant, par A, une parallèle AA′ à M′H.

4° Si l'on considère des coniques inscrites au triangle ABC et telles que les normales aux points de contact soient concourantes, le lieu décrit par ce point de concours est identique au précédent.

Cet exercice ayant été proposé dans ce journal nous avons cru devoir communiquer à ses lecteurs la solution précédente avec les remarques que nous y avons ajoutées. Mais on peut observer que la question n'est pas nouvelle. Elle a été proposée par M. Darboux (*Nouvelles Annales*, 1866, p. 95) et résolue (*loc. cit.* p. 420) par M. L. Biny, en employant les coor-

données barycentriques, *coordonnées naturelles* de cette question qui parait être de celles qui semblent destinées à renaître, de temps à autre, car on la retrouve encore dans l'*Educational Times* proposée sous le n° 8396 par le professeur F. Purser et résolue (n° du 1er mai 1886) par le professeur Sircom *and others*. G. L.

BOURSES DE LICENCE (1886)

On considère le système S des plans représentés par l'équation

$$\mu^3 + 3\mu^2 x + 3\mu y + z = 0,$$

dans laquelle μ désigne un paramètre variable.

Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires. Soit M le plan de ce système pour lequel le paramètre μ a la valeur particulière m. Par chaque point A du plan M passent deux plans M′, M″ du système S, autre. que le plan M. Soient μ', μ'' les valeurs du paramètre μ relatives à ces deux plans.

1° Suivant la région du plan M à laquelle appartient le point A. Les nombres μ', μ'' sont réels ou imaginaires et comprennent entre eux le nombre m ou bien sont tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à lui. Distinguer ces diverses régions.

2° Trouver dans le plan M le lieu des points A tels que les deux plans M′, M″ soient perpendiculaires entre eux; trouver dans l'espace le lieu des points tels que deux des trois plans du système S qui passent par l'un quelconque d'entre eux soient perpendiculaires.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1886)

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle et deux points P et Q situés sur un de ses diamètres; on joint les points P et Q aux extrémités A et B d'un diamètre du cercle par les droites PA et QB qui se coupent au point M; on fait tourner le diamètre AB, et on demande :

1° D'étudier la variation du rapport $\frac{MA}{MB}$, et de construire la figure lorsque ce rapport a une valeur donnée;

2° D'étudier la variation de l'angle AMB, et de construire la figure lorsque et angle a une valeur donnée;

3° A′ et B′ étant les seconds points d'intersection des droites MA et MB avec la circonférence du cercle donné, de trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MA′B′.

L'analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Démontrer que, quand n augmente indéfiniment, la fraction

$$\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{a}{n-1}\right)}$$

tend vers une limite $\Gamma(a)$, qui est une fonction bien déterminée de la variable a, pour toute valeur réelle ou imaginaire de cette variable.

Montrer que si l'on donne à a une valeur positive, la fonction $\Gamma(a)$ est égale à l'intégrale eulérienne

$$\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

Démontrer que, pour une valeur quelconque de a, on a les relations suivantes :

$$a\Gamma(a) = \Gamma(a+1),$$
$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Application. — On désigne par p et q deux quantités réelles, et on propose :

1° De caculer le module de $\Gamma(qi)$;

2° De montrer que $\Gamma(p+qi)$ tend vers zéro lorsque q devient infini, la quantité p restant comprise entre $-\infty$ et un nombre positif fini;

3° De calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(1+yi)dy.$$

Mécanique rationnelle.

Un solide homogène, sur lequel n'agit aucune force extérieure, a la forme d'un parallélipipède rectangle dont les arrêtes ont respectivement pour longueur a, $2a$, $4a$; il est d'abord en repos, mais il peut se mouvoir librement dans l'espace.

Une sphère homogéne, animée d'un mouvement uniforme de translation dont la vitesse U est parallèle aux arêtes moyennes du parallélipipède, vient choquer ce solide en un point M situé sur l'une de ses faces F, perpendiculaire à ces arêtes moyennes.

La masse du parallélipipède est représentée par 12, et celle de la sphère par 4; les deux solides sont parfaitement élastiques.

Cela posé, on demande :

1° De déterminer les conditions initiales des mouvements que les deux solides prendront après le choc;

2° D'étudier le mouvement que prendra ultérieurement le parallélipipède dans le cas particulier où le point M coïncide avec l'un des sommets de la face choquée F.

Mathématiques spéciales.

Etant donnés dans un plan une droite D, un point O sur cette droite, et une droite D' :

1° Former l'équation générale des coniques qui touchent la droite D au point O et qui ont la droite D' pour directrice;

2° Démontrer que deux de ces coniques passent par un point quelconque P du plan; déterminer les régions du plan où doit se trouver le point P pour que ces deux courbes soient réelles, et, dans ce cas, en reconnaître le genre.

3° Les deux coniques du faisceau considéré qui passent par le point P se coupent en outre en un point P'; calculer les coordonnées du point P' en fonction de celles du point P, et, en supposant que le point P décrive une ligne C, trouver quelle doit être la forme de l'équation de cette ligne, pour que le point P' décrive la même ligne.

QUESTIONS PROPOSÉES

200. — Discuter la surface représentée par

$$\Sigma z(z - 1)(x + y)(x + 1)(y + 1) = 0.$$

Cette surface située de la même manière relativement aux trois plans coordonnées admet *neuf* droites au moins. En outre, elle admet une circonférence imaginaire, etc.

(Catalan.)

201. — Connaissant les angles α, β, α', β' des traces de deux plans avec la ligne de terre, calculer l'angle x de ces plans. *(Boutin.)*

202. — On donne une ellipse fixe de foyers F et F'. Une parabole a son foyer en F et est tangente à l'ellipse. Lieu du sommet S de cette parabole quand elle se déforme.

(Bordage.)

203. — On considère un cercle Δ de centre O et deux diamètres rectangulaires AA', BB'; puis, on imagine des paraboles P tangentes à Δ et passant par les points donnés B, B'. Le réseau des paraboles P est doublement infini et peut se séparer en deux réseaux : l'un, constitué par des paraboles P' dont les axes passent constamment par le milieu de OA; l'autre, par des paraboles P'' dont les axes coupent OA' en son point milieu.

On considère l'un de ces réseaux P″ et l'on demande.

1° Le lieu décrit par l'extrémité I du diamètre qui passe par O.

Ce lieu est le cercle décrit sur OA comme diamètre.

2° Démontrer que la longueur OI représente le double du paramètre de la parabole correspondante.

3° Trouver le lieu des sommets des paraboles P″.

Ce lieu est une cubique circulaire unicursale.

4° Déduire de ce lieu, et de la remarque faite au § 2, le lieu des foyers.

Ce lieu est encore une cubique circulaire unicursale.

5° On propose enfin de construire ces cubiques points par points, et tangentes par tangentes; en appliquant, pour celles-ci, le principe des transversales réciproques.

(G. L.)

204. -- On considère un triangle ABC et par les deux sommets B, C on fait passer des coniques Γ qui coupent de nouveau les côtés AB et AC respectivement en B′ et en C′ de telle sorte que les tangentes en ces points soient parallèles aux côtés AC et AB: trouver l'enveloppe des coniques Γ.

Cette enveloppe est une quartique située toute entière à l'intérieur du triangle ABC et présentant, aux sommets de ce triangle, trois points de rebroussement. On vérifiera que les tangentes en ces points sont les médianes du triangle et que le lieu demandé ne varie pas quand, au lieu des points B et C, on fait passer les coniques considérées par deux sommets quelconques du triangle ABC. *(G. L.)*

Le Directeur-Gérant.

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16042-6.

SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

L'équation d'une courbe algébrique quelconque peut toujours se mettre sous la forme

$$0 = y^m + y^{m-1}(a_1x + b_1) + y^{m-2}(a_2x^2 + b_2x + c_2) + \dots \quad (1)$$

Si dans cette équation, on donne à x une valeur quelconque, on en tire, pour y, m valeurs $y_1, y_2, \dots y_m$ qui font connaître les ordonnées des points d'intersection de la courbe et d'une parallèle à l'axe des y. Si nous représentons par Σy_i la somme $y_1 + y_2 \dots + y_m$, nous avons

$$\Sigma y_i = a_1x + b_1, \quad (2)$$

d'où l'on conclut le célèbre théorème de Newton :

Le lieu du centre de gravité des points d'intersection d'une courbe algébrique et d'une droite mobile qui reste parallèle à une direction fixe, est une droite.

Si nous différentions les deux membres de l'égalité (2), nous obtenons

$$\Sigma dy_i = a_1dx, \quad (3)$$

ou

$$\Sigma \frac{dy_i}{dx} = a_1.$$

La somme des cotangentes des angles sous lesquels une courbe algébrique est coupée par une droite mobile qui reste parallèle à une direction fixe, est constante.

Ce théorème que M. G. Humbert a obtenu comme corollaire d'une belle propriété énoncée dans son Mémoire sur une *application d'un théorème de Jacobi* (*), a été utilisé dans ma Note *sur une quartique unicursale* (**).

L'équation (1) donne encore

$$y_1y_2 + y_1y_3 + \dots + y_1y_m + y_2y_3 + \dots + y_{m-1}y_m$$
$$= a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

(*) *Journ. de Math. pures et appliquées* (4e série, t. I, 1885, p. 347).

(**) *Journ. de Math. spéc.* (1886, p. 121).

Différentiant les deux membres de cette égalité, et groupant convenablement les termes, nous avons

$$dy_1(\Sigma y_i - y_1) + dy_2(\Sigma y_i - y_2) + \dots + dy_m(\Sigma y_i - y_m) = (2a_2x + b_2)dx$$

ou

$$\Sigma y_i dy_i = \Sigma y_i \Sigma dy_i - (2a_2x + b_2)dx;$$

c'est-à-dire, en vertu de (2) et (3), et en divisan les deux membres par dx.

$$\Sigma y_i \frac{dy_i}{dx} = a_1(a_1x + b_1) - (2a_2x + b_2).$$

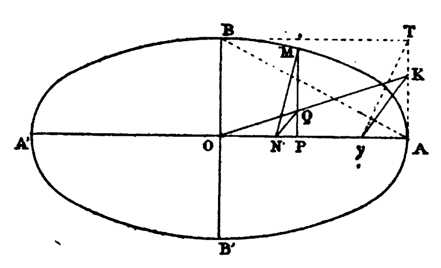
Or $y_i \dfrac{dy_i}{dx}$, c'est la sous-normale n_i. Donc enfin

$$\Sigma n_i = (a_1^2 - 2a_2)x + a_1b_1 - b_2, \qquad (4)$$

d'où ce théorème :

Si une droite mobile D *reste parallèle à une direction fixe, et que l'on mène les normales* N_1, N_2, ... N_m *à une courbe algébrique donnée aux points où elle est coupée par cette droite, le point où la droite* D *rencontre une droite fixe quelconque* Δ, *et le centre de gravité des points d'intersection de* Δ *et des normales* N_1, N_2, ... N_m *engendrent deux ponctuelles semblables.*

Supposons, en particulier, que la courbe considérée soit une conique, la droite Δ un axe de cette conique, et que la droite D soit perpendiculaire à Δ. Nous voyons que le théorème précédent conduit alors immédiatement au suivant.



Soit P *le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point* M *d'une conique sur un axe de cette conique,* N *le point où cet axe coupe la normale en* M *à cette conique. Par le pied* N *de la normale menons à une direction fixe* Δ *une parallèle qui coupe l'ordonnée* MP *au point* Q. *Le lieu du point* Q, *lorsque le point* M *se déplace sur la conique est une droite* δ.

On a ici

$$n = \frac{b^2}{a^2}x.$$

Donc si k est le coefficient angulaire de la direction Δ, le coefficient k' de la droite δ, qui d'ailleurs passe par le centre O, sera

$$k' = \frac{b^2}{a^2}k.$$

On sait que le centre de courbure γ au sommet A du grand axe d'une ellipse s'obtient en abaissant du point de rencontre T des tangentes aux sommets A et B une perpendiculaire sur la corde AB. Le point γ est à la rencontre de cette perpendiculaire et du grand axe AA'. Supposons le point γ construit. Si nous prenons sur la tangente au sommet A un point K quelconque et que nous tirions les droites KO et Kγ nous avons

$$\text{coeff. ang. KO} = \frac{b^2}{a^2}\ \text{coeff. ang. K}\gamma.$$

Donc, si l'ordonnée d'un point M de l'ellipse coupe la droite KO au point Q, et que la parallèle à Kγ menée par le point Q coupe l'axe OA au point N, la droite MN est la normale en M. De là, un procédé très commode pour mener les normales à l'ellipse, procédé qui pourra être très utilement employé dans la pratique lorsqu'il s'agira de tracer les joints d'une voûte en arc d'ellipse (*).

Pratiquement, on fera coïncider le point K avec le point T. Alors QN sera perpendiculaire à AB.

La construction précédente, prise à l'inverse, permet de mener par un point N de l'axe d'une conique, les normales à cette conique, problème qui se rencontre dans diverses questions de géométrie descriptive.

(*) Un mémoire plus étendu sur ce sujet, que nous avons rédigé dernièrement, et qui contient un certain nombre de propriétés nouvelles de l'ellipse, va paraître dans la *Revue maritime et coloniale.*

DE LA PUISSANCE D'UN POINT

PAR RAPPORT A UNE CONIQUE OU A UNE QUADRIQUE

Par M. **Troille**, élève au Lycée de Grenoble.

I. — *Coniques.*

Définition. — Étant donnée l'équation d'une courbe U, $f(x, y) = 0$, et un point fixe $M_0(x_0, y_0)$, non situé sur U; j'appelle puissance d'un point mobile $M(x, y)$ par rapport à U et à M_0 le quotient $\frac{f(x, y)}{f(x_0, y_0)}$. Si l'on prend deux points particuliers M′, M″ leurs puissances sont respectivement $\frac{f(x', y')}{f(x_0, y_0)}$, $\frac{f(x'', y'')}{f(x_0, y_0)}$; et le quotient $\frac{f(x', y')}{f(x'', y'')}$ représente donc, d'après notre définition, le rapport des puissances de ces deux points.

1. La conique est à centre. — Rapportée à ses axes, son équation est :

$$Ax^2 + By^2 + C = 0.$$

Une parallèle à oy, issue du point $M_0(x_0y_0)$ coupe la courbe et l'autre axe respectivement en P, Q et H. On a évidemment :

$$Ax_0^2 + B.\overline{PH}^2 + C = 0, \quad \text{et} \quad \overline{PH}^2 = -\frac{Ax_0^2 + C}{B}.$$

D'ailleurs :

$$M_0P.M_0Q = (y_0 - PH)(y_0 + PH) = y_0^2 - \overline{PH}^2$$

ou

$$M_0P.M_0Q = y_0^2 + \frac{Ax_0^2 + C}{B} = \frac{Ax_0^2 + By_0 + C}{B}.$$

Il en résulte que pour deux points $M_0(x_0y_0)$ et $M_1(x_1y_1)$, on a :

$$\frac{M_0P.M_0Q}{M_1P'.M_1Q'} = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 + C}{Ax_1^2 + By_1^2 + C}.$$

Prenons, maintenant, deux nouveaux axes quelconques de coordonnées : OX, XY; alors $Ax^2 + By^2 + C$ *devient* $f(X, Y)$; et, par suite :

$$\frac{M_0P.M_0Q}{M_1P'.M_1Q'} = \frac{f(X_0, Y_0)}{f(X_1, Y_1)}.$$

Donc :

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points* M_0, M_1, *dans une conique à centre, égale le rapport des produits des distances des points à la conique; distances comptées sur des droites parallèles à l'un ou à l'autre des axes de la courbe.*

2. La conique est une parabole. — Rapportons-la à son axe et à la tangente au sommet, son équation sera : $y^2 - 2px = 0$. — Menons, par le point $Mo(x_0, y_0)$, une parallèle M_0M à l'axe. L'abcisse PO de M est :

$$PO = \frac{y_0^2}{2p};$$

donc

$$PQ = PO - x_0 = \frac{y -_2 2px_0}{2p} = M_0M.$$

Prenons un autre point $M_1(x_1, y_1)$ et changeons d'axes : $y^2 - 2px$ *devient* $f(X, Y)$ dans le système XOY, donc :

$$\frac{M_0M}{M_1M'} = \frac{y_0^2 - 2px_0}{y_1^2 - 2px_1} = \frac{f(X_0, Y_0)}{f(X_1, Y_1)};$$

d'où :

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points* M_0, M_1, *dans une parabole, égale celui des distances des points à la courbe; distances comptées sur les diamètres qui correspondent à ces points.*

II. — *Quadriques.*

3. La quadrique est à centre. — Si on le rapporte à ses axes, elle a pour équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0.$$

La parallèle M_0H, à une direction principale, OZ par exemple, issue du point M_0 (x_0, y_0, z_0). coupe la surface en P et Q et le plan des xy en H. On a encore

$$PH^2 = -\frac{Ax_0^2 + By_0^2 + D}{C},$$

puis $M_0P.M_0Q = z_0^2 - PH^2 = \dfrac{Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + D}{C}$.

Prenons un autre point $M_1(x_1, y_1, z_1)$, et changeons d'axes : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D$ *devient* $f(X, Y, Z)$, par suite

$$\frac{M_0P.M_0Q}{M_1P'.M_1Q'} = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + D}{Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + D} = \frac{f(X_0, Y_0, Z_0)}{f(X_1, Y_1, Z_1)}.$$

Donc

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points* M_0M_1 *dans une quadrique à centre, égale le rapport des produits des distances de ces points à la surface ; distances comptées sur des droites parallèles à l'un des axes de la quadrique. On prend arbitrairement l'un quelconque des trois axes.*

4. La quadrique est un paraboloïde. — Rapportée à ses deux plans principaux et au plan tangent au sommet, son équation est

$$Ay^2 + Bz^2 + Cx = 0.$$

Une parallèle à l'axe issue du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ coupe la surface en un point M dont l'abscisse est

$$-\frac{Ay_0^2 + Bz_0^2}{C};$$

donc, on a $MM_0 = \dfrac{Ay_0^2 + Bz_0^2 + Cx_0}{C}$.

De même pour un autrepoint $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Changeons d'axes d'une façon quelconque :

$Ay^2 + Bz^2 + Cx$ *devient* $f(X, Y, Z)$ et l'on a :

$$\frac{M_0M}{M_1M'} = \frac{Ay_0^2 + Bz_0^2 + Cx_0}{Ay_1^2 + Bz + Cx_1} = \frac{f(X_0, Y_0, Z_0)}{f(X_1, Y_1, Z_1)}.$$

Donc

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points*

M_0, M_1, *dans un paraboloïde, égale celui des distances de ces points à la surface; distances comptées sur les diamètres qui correspondent à ces points.*

5. La quadrique est un cylindre ayant une ligne de centres. — Rapportée à ces deux points principaux et à un plan quelconque perpendiculaire à leur intersection, elle est représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + C = 0.$$

Par deux points $M_0(x_0 y_0 z_0)$ et $m_0(x_0, y_0, o)$ menons deux parallèles à ox, elles coupent la surface en P, Q et p, q et on a évidemment : $M_0P = m_0p$; $M_0Q = m_0q$; par conséquent :

$$m_0p . m_0q = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 + C}{A} = M_0P . M_0Q.$$

Même raisonnement pour un autre point $M_1(x_1, y_1, z_1)$.
Si l'on change d'axes :
$Ax^2 + By^2 + C$ *devient* $f(X, Y, Z)$, il en résulte que :

$$\frac{M_0P . M_0Q}{M_1P' . M_1Q'} = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 + C}{Ax_1^2 + By_1^2 + C} = \frac{f(X_0, Y_0, Z_0)}{f(X_1, Y_1, Z_1)}.$$

Donc

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points* M_0, M_1, *dans un cylindre elliptique ou hyperbolique, est égal au rapport des produits des distances de ces points au cylindre; distances comptées sur des droites perpendiculaires à un des plans principaux.*

6. La quadrique est un cylindre parabolique. — Un calcul identique au précédent appliqué au cas où la conique directrice est une parabole conduit très facilement au théorème suivant :

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points* M_0, M_1, *dans un cylindre parabolique égale celui des distances de ces points à la surface; distances comptées sur des droites parallèles a la direction principale de la surface, direction bien déterminée qui correspond à la racine non nulle de l'équation en* **S**.

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 151.)

LES ENVELOPPES ET LA KREUZCURVE

Résumé. — Le problème qui nous a occupé dans ce travail correspond à l'énoncé suivant : *Une courbe étant construite point par point, déterminer le tracé de la tangente en l'un de ses points*. Il est à peine nécessaire de faire observer que la question soulevée par cet énoncé a, pour ainsi dire, une double face ; au problème précité en correspond évidemment un second, lequel est, en quelque sorte, son corrélatif ; cet autre problème correspond à l'énoncé : *Une courbe étant déterminée par ses tangentes successives, trouver, à chaque instant, le point de contact qui est situé sur chacune d'elles*.

Nous ne voulons pas aborder ici, au moins pour le moment, ce second problème. Nous avons été d'ailleurs prévenu dans cette voie par M. M. d'Ocagne, dont les recherches sont consignées dans un mémoire qui, écrit depuis quelques années, vient de paraître (*Nouvelles Annales*, 1886, p. 88). Nous nous proposons seulement de montrer par un exemple comment on peut aborder les questions de cette espèce.

Imaginons deux axes rectangulaires ox, oy et une courbe quelconque U. D'un point M, mobile sur U, on abaisse des perpendiculaires MP, MQ sur les axes et l'on demande de déterminer l'enveloppe des droites PQ, point par point.

Soient x, y les coordonnées de M ; l'équation de PQ est alors

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1, \qquad (1)$$

et la droite infiniment voisine de PQ, celle qui correspond à une position infiniment voisine de M, sur U, coupe celle-ci

en un point μ, point que nous nous proposons de déterminer et dont les coordonnées (X, Y) vérifient simultanément l'équation (1) et la suivante

$$\frac{\mathrm{X}dx}{x^2} + \frac{\mathrm{Y}dy}{y^2} = 0. \qquad (2)$$

La tangente à U, au point M coupe ox en T et l'on a

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PT}} = \mathrm{tg\ MTP} = -\frac{dy}{dx}.$$

D'après cela, l'équation (2) devient

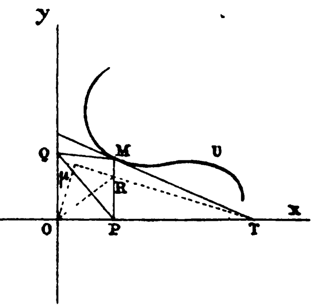
$$\frac{\mathrm{X.PT}}{\overline{\mathrm{OP}}^2} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{MP}}.$$

Abaissons de O une perpendiculaire sur PQ et soit R le point où elle rencontre MP; les triangles semblables POQ, OPR donnent

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \mathrm{OQ.PR} = \mathrm{MP.PR};$$

on a donc

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{RP}}.$$



Cette égalité prouve que $o\mu$ est perpendiculaire sur RT; la détermination du point μ résulte très simplement de cette remarque.

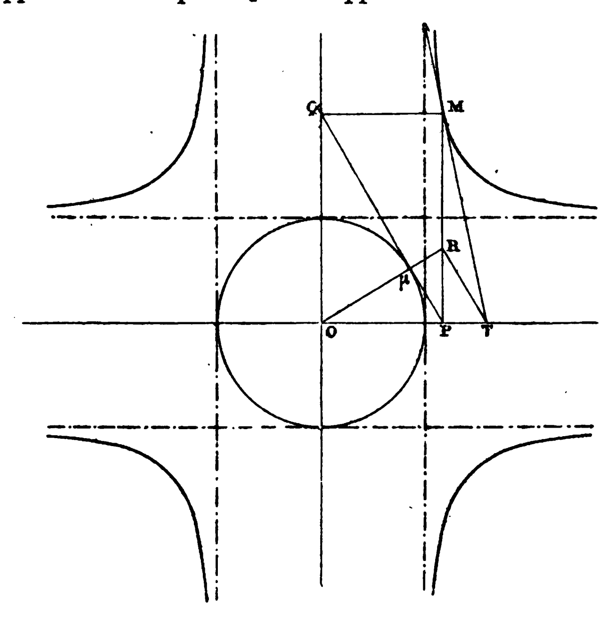
Lorsque la courbe U est une circonférence de centre O, la droite PQ, dans son mouvement, conserve une longueur constante; elle a pour enveloppe la courbe qu'on nomme l'hypocycloïde à quatre rebroussements. Dans ce cas particulier, le principe de Chasles, celui qui est relatif au centre instantané de rotation, prouve que le point μ coïncide avec la projection de M sur PQ. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que la construction que nous avons indiquée, pour le cas général, donne, pour μ, le même point que celui qu'on obtient par application du principe rappelé.

Mais voici un exemple auquel s'applique très simplement notre remarque.

Il faut d'abord observer que si la connaissance du point M et celle de la tangente MT entraînent la détermination du

point μ; *réciproquement,* la connaissance de μ et celle de la droite PQpermettent de trouver le point M et la tangente MT.

Supposons donc que PQ enveloppe un cercle de centre O



et de rayon R ; et soit μ le point de contact. Le lieu décrit par M est une courbe K dont l'équation est

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Cette courbe a la forme indiquée par la figure; elle a été, récemment, rencontrée par M. Schoute (*) qui pour rappeler cette forme, a proposé de la nommer *la Kreuzcurve* (**).

(*) Voyez: *Archiv der Mathematik and Physik von J.-A. Grunert,* weites Reihe.,Dritter Theil. Zweites Heft. Leipzig, 1885, p. 124 (Schoute: Die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexions Knoten).

(**) Voyez aussi notre Traité de Géométrie analytique à deux dimensions, p. 260.

La Kreuzcurve appartient, comme l'hypocycloïde à quatre rebroussements, l'ellipse et sa développée à cette famille de courbes qui sont représéntées par l'équation

$$A^m x^m + B^m y^m = C^{2m},$$

La perpendiculaire abaissée de O sur PQ se confond avec le rayon $O\mu$; il suffit donc de prolonger $O\mu$ jusqu'à sa rencontre avec MP, au point R; en R, on élève RT perpendiculairement à OR; TM est la tangente demandée et c'est ainsi qu'on peut construire par points et par tangentes la Kreuzcurve.

Pour être tout à fait axact dans la citation que nous venons de faire, nous devons pourtant ajouter que la quartique, considérée par M. Schoute est plus générale que la précédente et, pour avoir la Kreuzcurve de M. Schoute, il faut remplacer, dans la construction que nous avons indiquée, le cercle par une ellipse rapportée à ses axes. Mais le tracé que nous venons de donner pour la tangente subsiste avec les modifications évidentes.

La Kreuzcurve se rencontre dans plusieurs questions; voici, pour en citer des exemples, des exercices conduisant à cette courbe.

1° *On considère une ellipse fixe* Γ *et une corde* MM′ *mobile et perpendiculaire au grand axe de* Γ ; *soit* P *la parabole qui a pour sommet le centre de* Γ *et qui passe par les points* M, M′. *La tangente commune à* Γ *et à* P *touche* P *en un certain point* I, *dont le lieu géométrique est une Kreuzcurve.*

On trouve en effet pour l'équation du lieu demandé

$$y^2 = \frac{4b^2x^2}{x^2 - a^2},$$

2° *Le lieu des pôles des cordes normales à une ellipse est une Kreuzcurve.*

L'équation du lieu est, en effet, avec les notations habituelles

$$\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = c^4;$$

les axes de coordonnées étant, bien entendu, les axes de l'ellipse, etc. (*)

---

et qui ont été considérés par Lamé dans un de ses ouvrages (*Examen des différentes méthodes*, 1818). Voyez aussi l'ouvrage de M. de la Gournerie (*Recherches sur les surfaces réglées* ... 1867, p. 196).

(*) Voyez plus loin p. (211) un troisième exemple.

J'ajouterai, en terminant, que j'avais rassemblé, pour la rédaction de ce travail, beaucoup d'autres exemples que je renonce à exposer pour abréger cette note.

Ce que j'ai dit suffit certainement à mettre en lumière, une fois de plus, la fécondité, pour le tracé des tangentes, du principe des transversales réciproques ; et c'est le but principal que je m'étais fixé. J'aurai d'ailleurs occasion de proposer, à titre d'exercices, quelques-uns des exemples auxquels je viens de faire allusion et, s'ils offrent quelque intérêt, de cette façon, ils ne seront pas perdus.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 183.)

104. — Outre la cissoïde et la strophoïde, on peut citer, parmi les courbes célèbres qui se rattachent au groupe des cubiques circulaires unicursales, la trisectrice de Mac-Laurin (*).

En général, on donne le nom de *trisectrice* à une courbe qui permet de résoudre le problème de la trisection d'un angle donné; il y a, naturellement, une infinité de trisectrices et ces courbes sont au moins du troisième degré; celle dont

(*) D'après un renseignement que je dois à l'obligeance de M. Schoute, professeur à l'université de Groningue, cette courbe se trouve dans le *Traité des fluxions*, de Mac-Laurin (1749, pl. X, fig. 134, p. 198). Elle a fait récemment l'objet de diverses recherches parmi lesquelles nous citerons :

1° Un mémoire de M. Schoute (*Archives Néerlandaises*, t. XX, 1885), ayant pour titre : SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES UNICURSALES PAR POINTS ET PAR TANGENTES. Dans ce mémoire se trouve exposé, entre autres

nous allons dire quelques mots est une des plus simples que l'on puisse concevoir, elle correspond à la définition suivante : *la trisectrice de Mac-Laurin est une cubique circulaire droite possédant un nœud et les tangentes en ce point sont inclinées respectivement sur l'axe de la courbe, d'angles égaux à 60° et à 120°.*

Nous voulons simplement indiquer ici le tracé par points et par tangentes de la trisectrice en ne faisant usage que de la règle et de l'équerre; il nous suffira de particulariser le tracé général que nous avons fait connaître plus haut, de telle façon que les tangentes au nœud soient inclinées sur l'axe d' d'angles qui conviennent à la trisectrice en question.

A cet effet, prenons trois points en ligne droite O, O′, O″ et supposons que OO′ $= 3$O′O″, puis faisons la construction (1, 2, 3, *fig.* 83.)

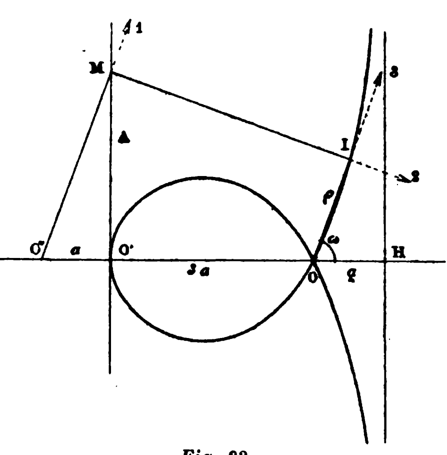


Fig. 83.

Ayant posé O′O″ $= a$, on obtient pour représenter le lieu

choses, un tracé de la trisectrice par points et tangentes, d'après une construction due à M. Godefroy.

2° Une note de M. d'Almeida Lima dans le (*Jornal de sciencias mathematicas e Astronomicas*, publié par le Dr Gomes Teixeira, Coimbra, 1885, p. 13) et intitulée *Sobre una curva do terceiro grao.*

3° Deux articles de M. Habich, directeur de l'école spéciale des constructions civiles et des mines de Lima, publiés dans la *Gaceta Cientifica*, année 1885, nos 9 et 12, p. 248, etc., ayant pour titre : DIVISION DE UN ANGULO EN PARTIES IGUALES.

4° Une note publiée dans ce journal (1885, p. 176).

5° Voyez aussi le *Supplément au cours de Mathématiques spéciales*, p. 113, et l'*Annuaire de l'Association française*, congrès de Grenoble, 1885.

D'après une note placée au début du premier article de M. Habich, que je viens de citer, la trisectrice a fait l'objet d'un travail du professeur M. Beraun, de Huànuco; mais cet opuscule ne nous est pas connu.

décrit par le point I, l'équation :

$$\rho = \frac{a}{\cos \omega} - 4a \cos \omega,$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - 3x^2).$$

Cette équation représente bien la trisectrice de Mac-Laurin ; sa discussion n'offre aucune difficulté et elle établit que la courbe correspondante a la forme qu'indique la figure.

Tracé de la tangente. — Il nous reste à trouver le tracé de la tangente en un point pris sur la courbe.

Soit I un point de la trisectrice, point qui correspond au point M de la droite Δ, comme nous venons de l'expliquer. Projetons O sur O″M en P, et menons IJ parallèle à OO″ ; nous pouvons observer que le lieu du point J est une trisectrice égale et parallèle à celle qui est décrite par le point I et que, d'autre part, le lieu de P est le cercle décrit sur OO″ comme diamètre. Enfin, les deux points P, J sont isotomiques sur O″M.

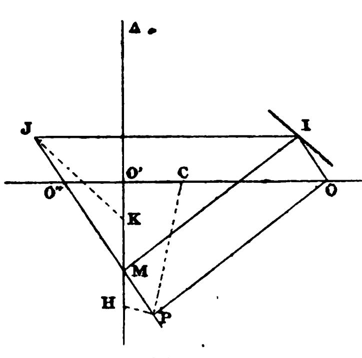


Fig. 84.

D'après ces diverses remarques, si l'on considère deux positions infiniment voisines de la figure mobile, le principe des transversales réciproques prouve que les tangentes aux lieux décrits par J et P coupent Δ en deux points H, K symétriques par rapport à M.

Concluons donc que, après avoir pris en C le milieu de OO″, on doit élever au point P une perpendiculaire PH à CP et prendre MK = HM ; la droite KJ ainsi obtenue est parallèle à la tangente cherchée.

(A suivre.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(CONCOURS DU 9 JUIN 1886)

On donne un rectangle ABA′B′. *Deux hyperboles équilatères* A *et* B *ayant toutes deux leurs asymptotes parallèles aux côtés du rectangle, passent : l'une* A *par les sommets opposés* A *et* A′, *l'autre* B *par les sommets opposés* B *et* B′.

1° Démontrer que le centre de l'hyperbole A *a, par rapport à l'hyperbole* B, *la même polaire* P *que le centre de l'hyperbole* B *par rapport à l'hyperbole* A;

2° Le rectangle restant fixe, on fait varier en même temps les deux hyperboles, de manière qu'elles soient égales entre elles sans être symétriques par rapport à l'un des axes de symétrie du rectangle. Examiner si elles se coupent en des points réels. Trouver le lieu du milieu de la droite qui joint leurs centres et prouver que la droite P *est constamment tangente à ce lieu ;*

3° Si on prend une quelconque des hyperboles A *et une quelconque des hyperboles* B, *il existe une infinité de rectangles ayant, comme le rectangle donné, les sommets opposés sur chacune de ces hyperboles, et les côtés parallèles aux asymptotes. Trouver le lieu des centres de ces rectangles*

1. — Prenons pour axes les médianes du rectangle et désignons les longueurs de ses côtés par $2a$ et $2b$. Les équations des hyperboles (A) et (B) sont

$$\frac{xy}{ab} - \alpha\frac{x}{a} + \alpha\frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{xy}{ab} - \beta\frac{x}{a} - \beta\frac{y}{b} + 1 = 0. \qquad \text{(B)}$$

Nous poserons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{x}{a} = X, \qquad \frac{y}{b} = Y$$

et nous écrirons, en conséquence, les équations précédentes sous la forme

$$XY - \alpha X + \alpha Y - 1 = 0, \qquad \text{(A)}$$

$$XY - \beta X - \beta Y + 1 = 0. \qquad \text{(B)}$$

La polaire du centre de (A) [point dont les coordonnées sont $(-\alpha, +\alpha)$] par rapport à (B), a pour équation

$$-\alpha(Y-\beta)+\alpha(X-\beta)-\beta X-\beta Y+2=0$$

ou

$$X(\beta-\alpha)+Y(\alpha+\beta)=2 \qquad \text{(P)}$$

on retrouve la même équation en cherchant la polaire du point (β, β) par rapport à (A).

2. — Lorsque l'équation d'une hyperbole équilatère est

$$xy-Ay-Bx+C=0$$

ou

$$(x-A)(y-B)=AB-C$$

si la courbe passe par un point (a, b), la puissance de ce point par rapport aux asymptotes de l'hyperbole est égale à la valeur absolue de

$$(a-A)(b-B).$$

Mais si deux hyperboles représentées par:

$$xy-Ax-By+C=0, \quad xy-A'x-B'y+C'=0,$$

et passant: la première par (a, b), l'autre par $(a'\ b')$ sont égales, on doit avoir

$$(a-A)(b-B)=\pm(a'-A')(b'-B').$$

Appliquons cette remarque aux équations (A) et (B); la première passe par le point (1, 1); l'autre par le point (1, — 1). Nous avons donc

$$(1-\alpha)(1+\alpha)=\pm(1-\beta)(-1-\beta)$$

ou

$$1-\alpha^2=\pm(1-\beta^2).$$

Si l'on adopte le signe +, on a $\alpha=\pm\beta$; à cette hypothèse correspondent des hyperboles égales, mais symétriques par rapport à l'un ou l'autre des axes de coordonnées et nous n'avons pas à les considérer ici.

Prenons l'autre signe et nous trouvons alors que les deux hyperboles (A) et (B) sont égales [et non symétriques] lorsque la condition

$$\alpha^2+\beta^2=2, \qquad (1)$$

est vérifiée.

1° Cherchons à déterminer les points communs aux deux coniques (A) et (B) lorsque α et β satisfont à l'égalité (1).

Les équations (A) et (B) donnent, par combinaison,

$$(\beta - \alpha) X + (\alpha + \beta) Y = 2,$$

et

$$(\alpha + \beta) X + (\beta - \alpha) Y = 2XY.$$

On en déduit

$$4XY = (\beta^2 - \alpha^2)(X^2) + Y^2) + XY \{(\beta - \alpha)^2 + (\beta + \alpha)^2\}.$$

L'égalité (1) prouve que

$$(\beta - \alpha)^2 + (\beta + \alpha)^2 = 4, \qquad (2)$$

et comme nous supposons $\beta^2 - \alpha^2 \neq 0$, l'équation se réduit à

$$X^2 + Y^2 = 0;$$

les points communs aux deux coniques, abstraction faite des points qui sont à l'infini, dans la direction Ox et dans la direction Oy, sont donc *imaginaires*.

2° Cherchons l'enveloppe des droites P. L'égalité (2) prouve que l'on peut poser

$$\beta - \alpha = 2 \cos \varphi, \qquad \beta + \alpha = 2 \sin \varphi$$

et l'équation de P peut s'écrire

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi = 1.$$

On sait que l'enveloppe de ces droites est la courbe qui a pour équation

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

ou, dans la notation explicite,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette équation représente une ellipse inscrite au rectangle proposé, les points de contact étant les milieux des côtés.

Nous allons reconnaître que cette enveloppe coïncide avec le lieu des milieux de la droite qui joint les centres des deux coniques.

En effet les coordonnées des centres étant

$$-\alpha, +\alpha, \qquad \text{et} \qquad \beta, \beta;$$

celles du point milieu de la droite qui les joint sont :

$$X = \frac{\beta - \alpha}{2}, \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

La relation (2) prouve que le lieu décrit par ce point est justement représenté par l'équation

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

3. — Coupons les hyperboles (A) et (B) par une droite Δ parallèle à l'axe des Y, $(X = \lambda)$; Δ rencontre (A) et (B) en

es points K, K′ dont les cordonnées sont

$$K \left\{ \lambda, \quad \frac{1 + \alpha\lambda}{\alpha + \lambda} \qquad K' \left\{ \lambda, \quad \frac{\beta\lambda - 1}{\lambda - \beta}. \right.\right.$$

Les parallèles à l'axe des X menés par les points K et K′ rencontrent les hyperboles (B) et (A), respectivement en des points H et H′ ayant pour coordonnées

$$H \left\{ \frac{\beta - \alpha + \lambda(\alpha\beta - 1)}{1 - \alpha\beta + \lambda(\alpha - \beta)}, \quad \frac{1 + \alpha\lambda}{\alpha + \lambda}; \right.$$

$$H' \left\{ \frac{\beta - \alpha + \lambda(\alpha\beta - 1)}{1 - \alpha\beta + \lambda(\alpha - \beta)}, \quad \frac{\beta\lambda - 1}{\lambda - \beta}. \right.$$

Les abcisses des points H et H′ étant égales, on voit donc que, λ variant, il existe une infinité de rectangles tels que ABA′B′ ayant les sommets opposés situés sur les hyperboles (A) et (B).

Il reste enfin à déterminer le lieu décrit par les centres de ces rectangles (*).

Soit ω le centre de l'un de ces rectangles; ce point est situé au milieu de KH′ et ses coordonnées x, y se calculent, par conséquent, au moyen des formules

$$2X = \lambda + \frac{\beta - \alpha + \lambda(\alpha\beta - 1)}{1 - \alpha\beta + \lambda(\alpha - \beta)} = (\alpha - \beta)\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \alpha\beta + \lambda(\alpha - \beta)}, \quad (1)$$

$$2\gamma = \frac{1 + \alpha\lambda}{\alpha + \lambda} + \frac{\beta\lambda - 1}{\lambda - \beta} = (\alpha + \beta)\frac{(\alpha + \lambda)(\lambda + \beta}{\lambda^2 - 1}. \quad (2)$$

Il est évident, *à priori*, en examinant le tracé géométrique qui conduit au point ω, que le lieu décrit par ce point est une courbe unicursale et les équations précédentes permettent justement de construire ce lieu, point par point. Il semblerait même, au premier abord, que le lieu est du quatrième ordre ; mais ce n'est là qu'une apparence et l'on trouve ici, comme on va le voir, l'occasion d'appliquer une remarque connue (C.M.S. ; t. II, p. 562 ; ex. 1).

Pour trouver l'équation cartésienne du lieu décrit par ω il faut éliminer λ entre (1) et (2). A cet effet, observons que ces

(*) Ce lieu peut s'obtenir par des calculs très différents et même, peut-être, plus simples que ceux qu'on va lire ; mais la marche que nous adoptons ici nous paraît être la plus naturelle et la plus méthodique.

égalités peuvent s'écrire

$$\frac{\alpha - \beta}{2X} = \frac{1 - \alpha\beta + \lambda(\alpha - \beta)}{\lambda^2 - 1},$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2Y} = \frac{\lambda(\alpha - \beta) - \alpha\beta + \lambda^2}{\lambda^2 - 1}.$$

Sous cette forme, on voit que l'on a :

$$\frac{\alpha + \beta}{2Y} + \frac{\beta - \alpha}{2X} = 1.$$

Le lieu décrit par ω est donc l'hyperbole équilatère U correspondant à l'équation

$$\left(X - \frac{\beta - \alpha}{2}\right)\left(Y - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{4}.$$

Cette courbe passe par l'origine, ses asymptotes sont en évidence dans l'équation précédente; elle est donc bien déterminée.

Elle ne se réduit à un système de droites que si l'on suppose $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ et, dans ce cas, nous l'avons remarqué plus haut, les hyperboles considérées sont symétriques par rapport à l'un des axes de coordonnées.

On pourrait aussi traiter ces questions par des considérations purement géométriques, mais elles ont été déjà fort bien exposées dans la brochure *Examens d'admissibilité et d'admission à l'École Polytechnique* (1886, p. 13) publiée par la librairie Croville-Morant, et nous renvoyons le lecteur à cette source.

4. Remarque. — Lorsque les hyperboles (A) et (B) sont supposées variables, tout en restant égales entre elles, sans être pourtant symétriques par rapport aux axes de coordonnées, on a $\alpha^2 + \beta^2 = 2$ et l'on peut poser, comme nous l'avons fait observer plus haut,

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \varphi, \qquad \frac{\beta - \alpha}{2} = \cos \varphi.$$

L'équation de U s'écrit alors

$$XY = X \sin \varphi + Y \cos \varphi.$$

L'enveloppe des hyperboles correspondantes est la courbe représentée par l'équation

$$X^2 + Y^2 = X^2Y^2,$$

ou, en revenant à la notation explicite,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2y^2}{a^2b^2}. \qquad \text{(K)}$$

Cette quartique est bien connue (*), c'est la *Kreuzcurve.*

QUESTIONS D'EXAMENS

8. — *Trouver la valeur de*

$$y = \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}, \qquad (1)$$

pour $x = 0$.

1re Solution. La valeur principale du numérateur est

$$x(La - Lb);$$

celle du dénominateur est

$$x(Lc - Ld).$$

D'après cette remarque, la valeur demandée est égale à

$$L\frac{a}{b} : L\frac{c}{d}.$$

Mais cette démonstration constitue, au même titre que l'application de la règle de l'Hôpital un cercle vicieux d'une nature particulière, par ce qu'elle exige, du moins dans la pratique, la connaissance de la dérivée de a^x et cette dérivée ne serait pas connue si l'on ne pouvait pas trouver, par une voie directe et indépendante de cette connaissance, la valeur de l'expression proposée, pour $x = 0$.

2e Solution. L'égalité (1) peut s'écrire

$$y = \frac{\left(\dfrac{a^x - b^x}{x}\right)}{\left(\dfrac{c^x - d^x}{x}\right)}.$$

Cherchons, pour $x = 0$, la valeur de z,

$$z = \frac{a^x - b^x}{x}.$$

(*) Voyez le présent numéro p. 200.

Nous avons d'abord

$$z = b^x \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1}{x},$$

et la question proposée revient à la détermination de la valeur de

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1}{x}, \text{ pour } x = 0. \qquad (2)$$

Cette question se rencontre précisément quand on cherche la dérivée de la fonction exponentielle et l'on démontre, à ce propos, que l'expression (2) a pour valeur $L\left(\frac{a}{b}\right)$, pour $x = 0$.

Remarque. On peut traiter de la même façon et par l'une ou l'autre des méthodes que nous venons d'indiquer le problème suivant, qui généralise la question précédente :

Trouver pour $x = 0$, *la valeur de* y,

$$y = \frac{Aa^x + Bb^x + \dots + Ll^x}{A'a'^x + B'b'^x + \dots + L'l'^x},$$

expression dans laquelle on suppose

$$A + B + \dots + L = 0,$$

et

$$A' + B' + \dots + L' = 0.$$

La valeur cherchée est :

$$\frac{\log a^A b^B \dots l^L}{\log a'^{A'} b'^{B'} \dots l'^{L'}}$$

9. — *Lorsque deux cônes* C, C′ *sont tangents en un certain point* M *ils se coupent suivant une courbe* U *qui projetée sur le plan tangent commun* P *donne une courbe* u *ayant en* M *un point double; les tangentes en ce point et les génératrices de contact forment un faisceau harmonique.*

Prenons P pour plan des xy ; les équations des cônes C et C′ pourront s'écrire sous la forme suivante

$$z(Ax + By + Cz + D) + (y - mx)^2 = 0,$$
$$z(A'x + B'y + C'z + D') + (y - m'x)^2 = 0.$$

Éliminons z entre ces deux équations, nous obtenons l'équation de u :

$$\{C(y - m'x)^2 - C'(y - mx)^2\}$$
$$= \{C(A'x + B'y + D') - C'(Ax + By + D)\}$$
$$\{(Ax + By + D)(y - m'x)^2 - (A'x + B'y + D')(y - mx)^2\}.$$

L'origine est un point double de cette courbe et les tangentes en ce point sont données par l'équation

$$(CD' - DC')\{D(y - m'x)^2 - D'(y - mx)^2\} = 0.$$

Cette égalité établit la proposition en question, parceque les quatre droites d'un faisceau harmonique sont, par une propriété connue, représentées par les équations :

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad P + \lambda Q = 0, \qquad P - \lambda Q = 0.$$

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Brocard.

... Au sujet de l'article de M. Lebel (*J. S.*, p. 147 et suivantes), on peut observer que M. Fauquembergue est arrivé, de son côté, à quelques résultats analogues, comme on peut le voir par l'énoncé 1555 des *N. A. M.* (1885 (3) IV. p, 535)...

Nota. — La strophoïde a fait l'objet de recherches nombreuses et, probablement, les propriétés signalées dans l'article en question ont été déjà reconnues. On pourra consulter, notamment, sur cette courbe célèbre, une étude très complète qui a été publiée par M. Georges Ritt (*Nouvelles Annales*, 1846, p. 470).

D'après une rectification (*loc. cit.*, p. 557) le mémoire en question a pour auteur véritable, M. Montucci, docteur de l'Académie de Sienne. G. L.

Extrait d'une lettre de M. Chapron.

... M. Em. Vigarié (*Journal*, p. 22) a signalé dans ce journal une disposition de la Table de Pascal. En voici une

autre, extraite de la correspondance de Hachette sur l'École Polytechnique, janvier 1811.

	1	1^b	1^d	1^f	1^h	1^k	1^m	1^p
a	1	2	3	4	5	6	7	8
c	1	3	6	10	15	21	28	36
e	1	4	10	20	35	56	84	120
g	1	5	15	35	70	126	210	330
i	1	6	21	56	126	252	462	792
l	1	7	28	84	210	462	984	1776
n	1	8	36	120	330	792	984	2760

Un simple coup d'œil jeté sur ce tableau fait reconnaître que les diagonales *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *ik*, *lm*... sont les coefficients des puissances 1[re], 2[e], 3[e],... du binôme...

(Note de MONGE, *examinateur.)*

NOTA. — A propos de la communication de M. Vigarié, rappelée dans la présente lettre, nous signalerons un article historique publié par M. Aristide Marre (*Nouvelles Annales*, 1846, p. 488) : *Du binôme de Newton, antérieurement à Newton.* Dans cette note, M. A. Marre signale ce fait curieux qu'en Europe les coefficients binomiaux ont été utilisés pour l'extraction des racines avant de l'avoir été pour l'élévation aux puissances et il cite l'ouvrage de Stifel *(Arithmetica integra, authore Michaelo Stifelio)* dans laquelle se trouve une table qui n'est autre chose que le triangle de Pascal. L'ouvrage de Stifel est de 1544; il resterait à connaître la date exacte

du *Traité général des nombres* de Nicolo Tartaglia, signalé dans la lettre de M. Vigarié (*). G. L.

QUESTION PROPOSÉE

204. — Soient ox, oy deux axes de coordonnées rectangulaires. On considère des paraboles P qui passent par l'origine tangentiellement à ox et qui coupent oy en un point fixe A ($OA = 4b$). Sur OA, on prend un point B tel que $OB = b$ et de ce point B on mène les normales à P. Trouver le lieu décrit par les pieds de ces normales.

Abstraction faite de la normale BO on peut mener deux normales à la parabole P, par le point B.

On fera voir que le lieu demandé est constitué :

1° Par une droite menée par B parallèlement à ox ; et l'on donnera une démonstration géométrique de cette propriété ;

2° Par une quartique unicursale.

On vérifiera que cette quartique, formée de deux ovales présentant à l'origine un point d'embrassement, correspond :

Soit à l'équation cartésienne

$$x^4 + 2x^2y(y - 2b) + y^2(y - b)(y - 4b) = 0,$$

soit aux équations

$$\frac{x}{b} = \frac{3t(t^2 - 2)}{(t^2 + 1)^2},$$

$$\frac{y}{b} = \left(\frac{t^2 - 2}{t^2 + 1}\right)^2.$$

(G. L.)

(*) *Parmi les procédés de calcul qui conduisent aux coefficients binômiaux on peut observer, cette remarque m'a été faite par M. Laisant, dans une lettre qui sera publiée dans le prochain numéro du* Journal de Mathématiques élémentaires, *qu'ils sont fournis par les puissances successives de 11, (121, 1331, 14641, ...). La raison de ce résultat est évidente; la méthode de calcul de M. Philippof, analysée dans le précédent numéro (J. M. E.) conduit d'ailleurs très naturellement à cette remarque curieuse.*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

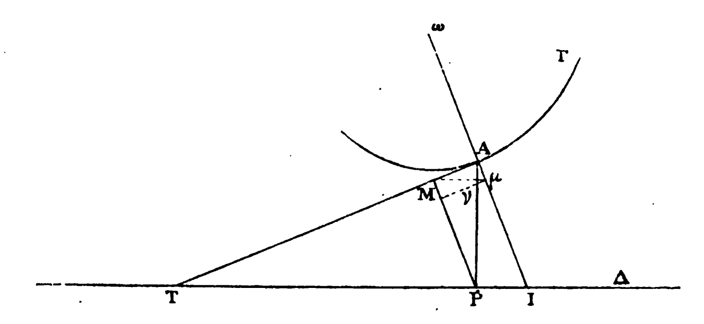
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16622-6.

NOTE DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

Dans l'intéressante étude sur diverses courbes remarquables qu'il a publiée dans ce Journal, M. G. de Longchamps a spécialement envisagé (*) la courbe qu'il appelle *anti-développée* d'une courbe donnée, et qui est le *lieu des symétriques des centres de courbure de la courbe considérée par rapport aux points correspondants de cette courbe.*

C'est une propriété bien connue que l'*anti-développée d'une chaînette est une droite.* Et l'on sait que la chaînette est la développée de la *tractrice*, c'est-à-dire de la courbe telle que les portions de ses tangentes comprises entre le point de contact et une certaine droite sont toutes égales entre elles.



Le but de cette note est de démontrer géométriquement la propriété inverse, à savoir que *toute courbe qui a pour anti-développée une droite, est une chaînette, c'est-à-dire une développée de tractrice.*

Je ne m'appuierai d'ailleurs que sur des formules dont j'ai donné, dans ce Journal même (année 1880, p. 433), des démonstrations absolument élémentaires.

Soit Γ la courbe considérée, dont l'anti-développée est la

(*) 1886, p. 11.

droite Δ ; soient, en outre, en un point quelconque A de cette courbe, ωI la normale qui coupe Δ au point I, et ω le centre de courbure, de telle sorte que $\omega A = AI$.

Du point A abaissons sur Δ la perpendiculaire AP, et du point P, sur la tangente AT, la perpendiculaire PM.

Soit $M\mu$ la normale à la courbe que décrit le point M.

L'angle AMP étant constant, on a la normale à l'enveloppe du côté PM, en abaissant du centre instantané de rotation μ la perpendiculaire $\mu\nu$ sur cette droite ; cette normale $\mu\nu$ coupe au point ν la droite AP qui est normale à la trajectoire Δ du point P.

Représentons par $d(P)$, $d(A)$, $d(M)$ les déplacements infiniment petits simultanés des points P, A, M. La droite AP se déplaçant en restant parallèle à une direction fixe, nous avons (*loc. cit.*, Principe I)

$$\frac{d(P)}{d(A)} = \frac{PT}{AT}.$$

Nous avons aussi (*ibid.*, Principe III)

$$\frac{d(A)}{d(M)} = \frac{A\omega}{M\mu},$$

$$\frac{d(M)}{d(P)} = \frac{M\mu}{P\nu}.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre ; il vient

$$\frac{PT.A\omega}{AT.P\nu} = 1,$$

ou

$$\frac{PT}{AT} = \frac{P\nu}{A\omega} = \frac{P\nu}{IA}.$$

Mais on a

$$\frac{PT}{AT} = \frac{PA}{IA};$$

donc

$$P\nu = PA,$$

c'est-à-dire que le point ν se confond avec le point A, et, par suite, le point μ aussi. La droite MA est donc normale à la courbe décrite par le point M, et comme MA touche son enveloppe au point A, ce point est le centre de courbure correspondant. Maintenant, la normale PA à la droite Δ que

décrit le point P passant constamment par le centre de courbure A correspondant, on a

$$d.\mathrm{PM} = 0,$$

et, par suite,

$$\mathrm{PM} = \text{const.}$$

La courbe décrite par le point M est donc une tractrice, et la courbe Γ étant la développée de celle-ci, le théorème est démontré.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite,* voir p. 204.)

CHAPITRE XI

LES CUBIQUES UNICURSALES NON CIRCULAIRES

Le Folium de Descartes. — La Serpentine. — Le Trident de Newton. — La Cubique d'Agnesi. — Les Cubiques paraboliques et hyperboliques. — Cubiques diverses.

Toutes les cubiques qui possèdent un point double pouvant s'engendrer, point par point, de telle sorte qu'une transversale issue du point double ne rencontre la courbe qu'*en un seul point*, leur construction ressort évidemment de la géométrie que nous développons ici; et, après nous être occupé, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, des cubiques circulaires unicursales, nous allons maintenant considérer quelques autres cubiques unicursales, mais non circulaires.

105. Le Folium de Descartes (*). — Soient Δ, Δ' deux droites parallèles, OB une perpendiculaire commune; menons

(*) Sur cette courbe on pourra consulter une intéressante notice bibliographique de Terquem, publiée dans les *Nouvelles Annales*, 1844, p. 301.

une transversale mobile OA et, du point B, abaissons BC perpendiculaire sur OA. Prenons ensuite $CA' = AC$ et soit I le conjugué harmonique de A par rapport au segment OA'.

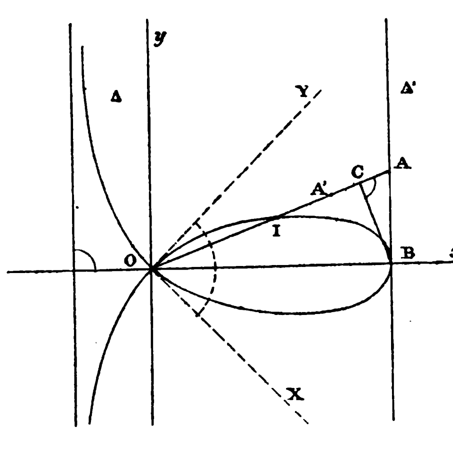


Fig. 85.

Nous allons reconnaître que le lieu décrit par I est un folium de Descartes.

Nous avons en effet

$$\frac{2}{OA'} = \frac{1}{OI} + \frac{1}{OA},$$

et

$$OA' + OA = 2OC.$$

Posons

$$OI = \rho, \quad IOB = \omega, \quad OB = d\,;$$

les égalités précédentes donnent alors

$$OA' = 2d\cos\omega - \frac{d}{\cos\omega}.$$

Par suite, tout calcul fait, l'équation du lieu cherché est

$$\frac{d}{\rho} = \frac{3\cos\omega - 2\cos^3\omega}{2\cos^2\omega - 1},$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$x(x^2 + 3y^2) + d(y^2 - x^2) = 0.$$

Il est facile de reconnaître, en prenant pour nouveaux axes les bissectrices OX, OY des axes Ox, Oy, que la courbe qui correspond à cette équation est le folium de Descartes.

106. La tangente au Folium. — Si nous considérons deux positions infiniment voisines de la transversale OA, les quatre points O, I, A', A formant une division harmonique et le point O étant commun aux deux transversales considérées, nous voyons ainsi que les tangentes aux lieux décrits par les points I, A' et A concourent au même point.

Le point A' décrit une strophoïde et la construction de la tangente au folium, au moyen de la règle et de l'équerre, se trouve ainsi ramenée à un tracé précédemment indiqué.

107. La transformation de Mac-Laurin. — Avant de considérer, comme nous en avons l'intention, le trident de Newton, la serpentine et la courbe d'Agnesi, nous devons dire quelques mots de la transformation de Mac-Laurin (*), parce que nous déduirons de celle-ci la construction de ces courbes par points et par tangentes.

Fig. 86.

Imaginons une courbe quelconque U et deux points fixes A et B; soit M un point de U. Joignons MA, puis menons BI parallèlement à AM; enfin traçons MI parallèle à une droite fixe Az. Nous obtenons ainsi un point I, et le lieu décrit par ce point est une courbe V, transformée de la courbe U.

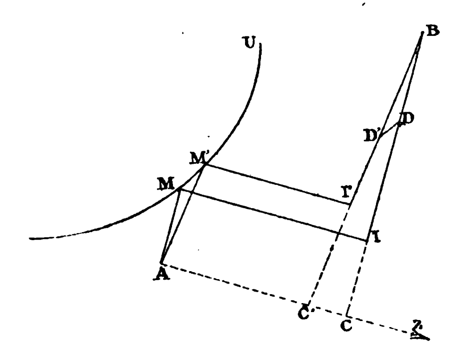


Fig. 87.

Nous allons montrer que l'on peut très simplement obtenir la tangente à la courbe V au point I.

Considérons deux positions voisines du tracé précédent et

(*) Cette transformation a été récemment développée par M. Schoute dans un mémoire publié en 1885 au tome XX des *Archives Néerlandaises* et intitulé: *Sur la construction des courbes unicursales par points et par tangentes*. Nous devons ajouter que la transformation que nous utilisons ici n'est qu'un cas très particulier de celle qui a été étudiée par M. Schoute, dans le travail cité.

prolongeons les droites BI, BI′ jusqu'à ce qu'elles rencontrent Az aux points C et C′, puis prenons

$$BD = IC = MA, \qquad BD' = I'C = M'A.$$

Les deux triangles MAM′, BDD′ sont égaux ; d'autre part DD′ et II′ sont deux transversales réciproques du triangle BCC et l'on est ainsi conduit à la remarque suivante :

Soit MT la tangente à la courbe U au point M ; ayant pris BD = MA on mène Dθ parallèle à MT jusqu'à sa rencontre en θ avez Az ; soit θ' le symétrique de θ par rapport à C, θ'I est la tangente demandée.

Voici une autre transformation des courbes, transformation dont nous avons déjà parlé (*) et qui constitue encore un cas particulier intéressant de celle de Mac-Laurin.

Prenons deux axes rectangulaires Ox, Oy et, sur Ox, un point fixe A ; soit U la courbe que nous voulons transformer. A cet effet, prenons sur U un point M ; menons MI parallèle à Oy et, par le point de rencontre B de AM avec Oy, une parallèle BI à Ox ; le point I correspond ainsi au point M et en appelant : x, y les coordonnées de M ; X, Y celles de I, les formules de transformation sont

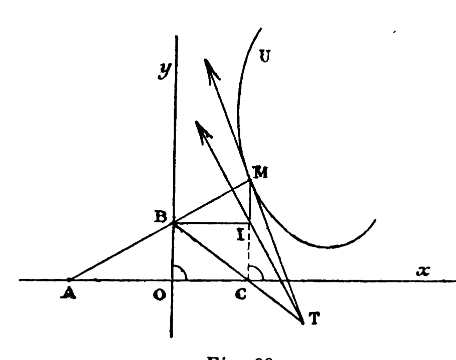


Fig. 88.

$$x = X, \qquad y = Y\frac{X + a}{a}. \qquad (1)$$

Nous allons démontrer que la tangente en M à la courbe U, la droite BC et la tangente en I au lieu décrit par ce point, sont trois droites concourantes (**).

(*) *Journal*, 1885, p. 199.

(**) Cette remarquable construction nous a été indiquée par M. Godefroy, architecte à Amsterdam, et elle peut être considérée comme la conséquence immédiate de celle que M. d'Ocagne a donnée (*loc. cit.*, p. 265) ; elle résulte aussi, si l'on veut, de considérations qui s'appliquent à toutes

Appelons ξ, η les coordonnées courantes; les équations de MT et de IT sont

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \qquad \eta - Y = \frac{dY}{dX}(\xi - X). \qquad (2)$$

Les formules (1) donnent

$$dx = dX, \qquad a(dy - dY) = xdY + Ydx \qquad (3)$$

Des formules (2) et (3), on déduit par combinaison

$$\eta x + \xi Y = 2xY + a(Y - y)$$

ou, en tenant compte de la seconde formule (1),

$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{Y} = 1.$$

Cette dernière égalité prouve que les deux tangentes considérées se coupent sur la droite BC.

Les principes que nous venons d'établir vont s'appliquer maintenant, comme on va le voir, à trois des cubiques remarquables que nous avons en vue.

108. La Serpentine. — Imaginons deux points fixes

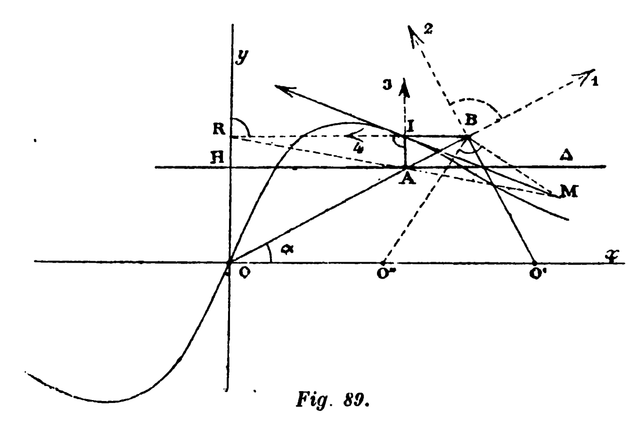


Fig. 89.

O, O′ et une droite Δ parallèle à OO′; si nous effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig. 89*) le lieu décrit par le point I

---

les courbes déduites, d'une courbe donnée, par la transformation de Mac-Laurin. Mais, pour ne pas entrer dans ces considérations générales, nous donnons ici une démonstration directe du cas particulier dont nous avons besoin.

est une cubique à laquelle Newton, pour rappeler sa forme, donnait le nom de *Serpentine*.

En appelant x, y, les coordonnées du point I et en posant

$$OH = d, \qquad OO' = d', \qquad BOO' = \alpha,$$

on a

$$x = d \operatorname{cotg} \alpha, \qquad y = d' \sin \alpha \cos \alpha.$$

Cette dernière relation peut s'écrire

$$y(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = d' \sin \alpha \cos \alpha;$$

l'équation du lieu est donc

$$y(x^2 + d^2) = dd'x.$$

La figure ci-dessus rappelle la forme de la courbe; la tangente au point I a été tracée en appliquant l'élégante construction de M. Godefroy.

109. Le trident de Newton. — Cette courbe est une cubique possédant un point double à l'infini et, parmi les cubiques de cette espèce, celle-ci est caractérisée par ce fait que son équation, lorsqu'on choisit convenablement les axes de coordonnées, est

$$y = \frac{U}{V},$$

U et V désignant des fonctions entières de x; la première, du troisième degré; l'autre, du premier degré. Il y a, naturellement, au point de vue de la sinuosité, plusieurs formes de trident, suivant le nombre des tangentes réelles que l'on peut mener à la courbe parallèlement à l'axe Ox; mais nous n'avons à nous préoccuper ici que de la construction du trident par points et par tangentes.

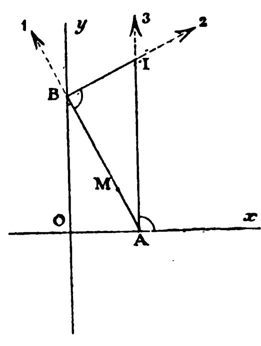


Fig. 90.

Voici, parmi beaucoup d'autres, une génération que nous voulons indiquer à cause de sa grande simplicité, mais elle ne conduit qu'à un trident particulier.

Autour d'un point fixe M on fait tourner une transversale qui rencontre les axes de coordonnées Ox, Oy aux points A, B; la construction (1, 2, 3; *fig. 90*) conduit à un certain point I.

En désignant par α, β les coordonnées du point M, on trouve que le lieu décrit par I est une courbe représentée par

$$y = \frac{x\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\}}{\beta(x-\alpha)};$$

c'est l'équation d'un trident, dans un cas particulier.

Mais voici une génération qui donne le trident, en prenant le mot dans le sens général que nous avons indiqué tout à l'heure.

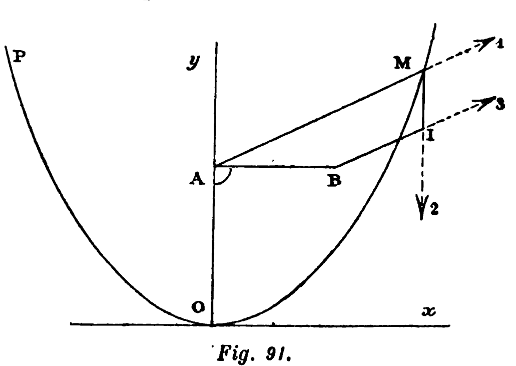


Fig. 91.

Considérons une parabole P rapportée à son axe Oy et à sa tangente principale Ox; soient A un point pris sur l'axe, B un point fixe donné sur la corde principale du point A; effectuons la construction (1, 2, 3; *fig. 91*) et cherchons le lieu du point I.

Soient x', y' les coordonnées du point M; en posant

$$OA = b, \qquad AB = a,$$

l'équation de BI est

$$y - b = \frac{y'-b}{x'}(x-a).$$

Comme on a $$x = x'$$
et $$x'^2 = 2py',$$

l'élimination de x' et de y' entre ces trois équations donne, pour l'équation du lieu décrit par le point I,

$$y = \frac{x^3 - ax^2 + 2abp}{2px}. \qquad (1)$$

Mais il importe de montrer que *tout trident* peut être engendré par ce procédé.

Considérons à cet effet l'équation générale des tridents

$$y = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{mx+n}, \qquad (A \text{ et } m \neq 0).$$

Si nous transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au moyen des formules

$$y + \lambda = Y, \qquad x + \frac{n}{m} = X$$

l'équation précédente devient

$$Y - \lambda = \frac{AX^3 + B'X^2 + C'X + D'}{mX},$$

et si nous disposons de λ par l'égalité

$$C' + \lambda m = 0,$$

nous avons finalement, dans ce système d'axes, l'équation du trident sous la forme

$$Y = \frac{AX^3 + B'X^2 + D'}{mX}. \qquad (2)$$

Nous pourrons donc identifier les équations (1) et (2) et il est ainsi démontré que la génération par points, que nous venons de donner, convient à tous les tridents.

Comme nous savons construire une parabole, par points et par tangentes, au moyen de la règle et de l'équerre, nous pouvons donc aussi, par application de la règle donnée dans un paragraphe précédent, construire le trident par points et par tangentes.

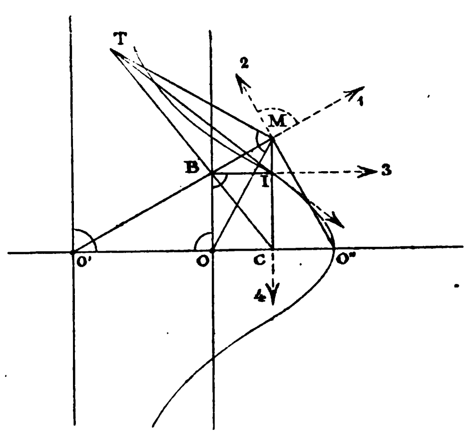


Fig. 92.

110. La courbe d'Agnesi. — Cette courbe, comme les précédentes, nous a déjà occupé (*) *(loc. cit.)*; nous ne la signalons ici que pour compléter cette série de cubiques remarquables et pour faire observer qu'on

(*) On trouvera (*Journal*, 1885, pp. 154 et 200) quelques développements et certains détails bibliographiques sur ces trois courbes.

peut la construire, par points et par tangentes, sans autre instrument que la règle et l'équerre.

Soient O, O', O″ trois points en ligne droite et tels que O'O = OO″. Si nous effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig.* 92), le lieu du point I est une courbe d'Agnesi.

En élevant au point M une perpendiculaire MT à OM jusqu'à sa rencontre en T avec BC, la droite TI, d'après la remarque de M. Godefroy, établie plus haut, est la tangente cherchée.

111. Les cubiques unicursales générales. — Voici, pour faire un dernier emprunt à l'intéressant mémoire de M. Schoute, une description par points et par tangentes qui permet de tracer les cubiques unicursales droites.

Prenons quatre points en ligne droite A, B, C, D, puis effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig.* 93) dans laquelle, bien entendu, les droites MB et MD sont rectangulaires. Si nous posons :

AB = a, AC = b, BD = c;
CI = ρ, ICD = ω, MBD = α.

Fig. 93.

Nous avons

$$a \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \omega,$$

et

$$c \cos^2 \alpha = \rho \cos \omega + b - a.$$

L'élimination de α entre ces deux équations donne

$$\rho \cos \omega = a - b + \frac{a^2 c}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \omega}$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$x(a^2x^2 + b^2y^2) = (a + c - b)a^2x^2 + (a - b)b^2y^2.$$

C'est l'équation générale des cubiques unicursales droites, quand on prend : 1° pour origine, le point double, 2° pour axe des x, l'axe de symétrie.

En faisant varier la disposition des points A, B, C, D on peut ainsi décrire un grand nombre de cubiques remarquables.

La tangente au lieu décrit par le point I se détermine très simplement en observant, avec M. Godefroy, que les tan-

gentes en M et I aux lieux décrits par ces points se coupent sur la droite NH. Cette propriété peut s'établir par des considérations géométriques comme celles qui sont développées dans le mémoire de M. Schoute, ou directement, en suivant la méthode que nous avons indiquée plus haut, dans un cas analogue.

112. Les cubiques simples. — Nous désignerons ainsi celles qui, dans un système convenable de coordonnées cartésiennes rectangulaires, peuvent être représentées par une équation aussi simple que possible, c'est-à-dire par une équation binôme.

Il n'existe que trois cubiques simples correspondant aux équations :

$$x^3 - hy^2 = 0, \qquad \text{(A)}$$
$$x^3 - h^2y = 0, \qquad \text{(B)}$$
$$xy^2 - h^3 = 0. \qquad \text{(C)}$$

La première est constituée par deux bras paraboliques et elle présente à l'origine un point de rebroussement; la deuxième est formée de deux bras paraboliques présentant une inflexion à l'origine, point qui est centre de la courbe. Ce sont les deux cubiques simples paraboliques.

Quant à la troisième elle affecte la forme de deux branches hyperboliques asymptotes aux axes de coordonnées; elle admet un point de rebroussement à l'infini dans la direction Ox; c'est la cubique simple hyperbolique.

Fig. 94.

113. Cubique simple parabolique à point de rebroussement. — Prenons un angle droit yox, une droite Δ parallèle à oy, puis effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig. 94*).

En posant $OC = h$, $BOx = \alpha$, on a immédiatement

$$x = h \cot g^2 \alpha,$$
$$-y = h \cot g^3 \alpha.$$

L'équation du lieu décrit par le point I est donc

$$x^3 = hy^2 \text{ (*)}. \qquad \text{(A)}$$

Tracé de la tangente. — Prenons un point M (x, y) sur la courbe (A) ; l'équation de la tangente en ce point est

$$3Xx^2 - 2hyY - hy^2 = 0,$$

ou

$$\frac{3X}{x} - \frac{2Y}{y} - 1 = 0. \qquad (a)$$

Fig. 95.

D'une façon générale, on peut observer que si l'équation d'une courbe est

$$x^p = Ay^q,$$

celle de la tangente au point (x, y) est

$$p\frac{X}{x} - q\frac{Y}{y} = p - q. \qquad \text{(T)}$$

L'équation (a) étant vérifiée par $X = 0$, $Y = -\frac{y}{2}$, on voit que la tangente à (A) s'obtient en prenant $OQ = \frac{PO}{2}$ et en joignant le point Q au point M considéré sur la courbe.

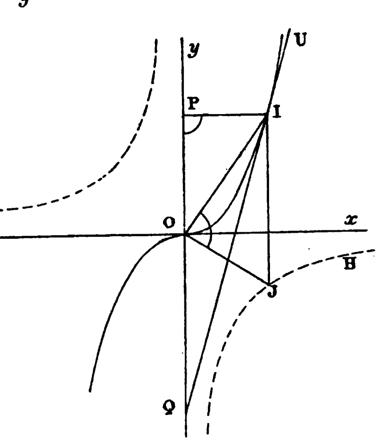


Fig. 96.

114. Cubique simple parabolique à centre. — Imaginons une hyperbole équilatère H, rapportée à ses asymptotes; prenons sur H un point J, joignons OJ, élevons OI perpendiculaire à OJ et menons

(*) Cette parabole cubique a été quelquefois désignée par l'épithète de *parabole Neilienne*, du nom du géomètre Guillaume Neil qui la signala comme une courbe rectifiable parce que son équation vérifiait les relations différentielles indiquées par Wallis pour ces sortes de courbes (*Nouvelles Annales*, 1844, p. 423).

enfin par J une parallèle à Ox. Nous obtenons ainsi un point I (X, Y) qui correspond au point J(x, y), et les coordonnées de ces points vérifient les relations

$$x = X, \qquad yY + X^2 = 0.$$

D'après cela, à l'hyperbole H représentée par l'équation

$$xy + h^2 = 0,$$

cette transformation fait correspondre une courbe U dont l'équation est

$$X^3 = h^2 Y.$$

On décrira donc l'hyperbole équilatère, point par point, par l'un des procédés connus et qui n'exigent que l'emploi de la règle et de l'équerre, puis on complétera la construction en passant du point J au point I, comme on vient de l'indiquer.

En appliquant la formule (T), dans laquelle on fait

$$p = 3, \qquad q = 1,$$

on a

$$3\frac{X}{x} - \frac{Y}{y} = 2.$$

En prenant OQ = 2PO, QI est la tangente en I.

115. Cubique simple hyperbolique. — Prenons un

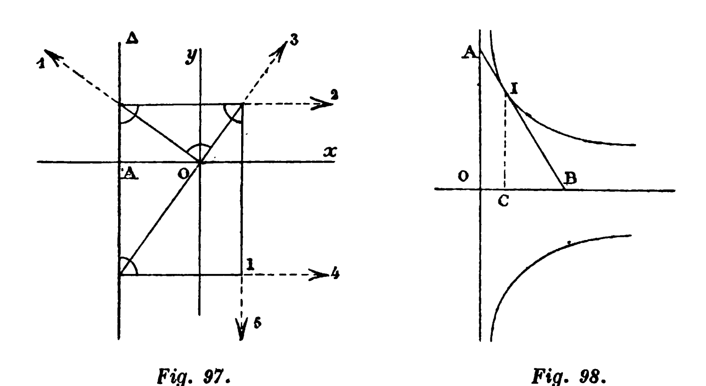


Fig. 97. *Fig. 98.*

angle droit yOx et une droite Δ parallèle à Oy, puis effectuons la construction (1, 2, 3, 4, 5; *fig. 97*) qui conduit à un certain

point I. En posant $OA = h$, le lieu de I est représenté par l'équation

$$xy^2 = h^3.$$

L'équation (T) appliquée à cet exemple, dans lequel on a

$$p = 1, \qquad q = -2,$$

donne

$$\frac{X}{x} + 2\frac{Y}{y} = 3.$$

D'après cela, I étant le point donné sur la courbe *(fig. 98)*, si l'on projette ce point en C sur OD et si l'on prend $CB = 2OC$, BI est la tangente à la courbe.

116. Remarque. — Les cubiques simples que nous venons de considérer se prêtent remarquablement bien à la solution du problème que nous avons examiné plus haut et qui est relatif à la duplication du cube.

Si dans les équations :

$$x^3 = hy^2, \qquad x^3 = h^2y, \qquad xy^2 = h^3,$$

on fait, respectivement,

$$y = h\sqrt{2}, \qquad y = 2h, \qquad x = \frac{y}{2};$$

on trouve, en effet,

$$x^3 = 2h^3, \qquad x^3 = 2h^3, \qquad y^3 = 2h^3.$$

(A suivre.)

LA QUESTION 199 ET L'HYPERBOLE DE KIEPERT

La question 199 proposée dans le numéro de juillet n'est pas nouvelle, comme nous le fait observer M. Lemoine, qui nous écrit à ce sujet et nous dit: « C'est la *définition même* du lieu étudié depuis sous le nom d'*hyperbole de Kiepert* (*) et qui a été proposé (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 40-42) dans la forme suivante: *Si, sur les côtés d'un triangle* ABC *on décrit les*

(*) Voici, à notre connaissance, les travaux auxquels a donné lieu cette remarquable conique :

1° Lemoine (*Annuaire de l'Association française*, Lyon 1873, p. 94);
2° Brocard (*J. M. S.*; 1884, p. 197 et 1885, p. 12);
3° Neuberg et Lemoine (*Mathesis*, 1886, p. 74). La conique considérée

trois triangles BA'C, BC'A, AB'C *isoscèles semblables (ces triangles étant tournés tous les trois vers l'intérieur de* ABC *ou tous les trois vers l'extérieur) les droites* AA', BB', CC' *se coupent en un point* M *qui décrit l'hyperbole en question.*

Or, des triangles isoscèles semblables ont évidemment des hauteurs proportionnelles aux côtés ; ce qui donne la forme de la question 199.

Quant à la valeur de k (*) pour laquelle les trois droites AA', BB', CC' sont parallèles, on la trouve en cherchant l'intersection de l'hyperbole de Kiepert avec la droite de l'infini et l'on trouve

$$k = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha - 3}\right),$$

α désignant l'angle de Brocard (**). »

L'identité de la question 199 avec celle des *Nouvelles Annales* rappelée ci-dessus nous avait échappé, bien que, par suite de recherches personnelles sur l'hyperbole de Kiepert, cette conique était, en ce moment, présente à notre pensée.

Voici quelques-uns des résultats auxquels nous venons de faire allusion.

Prenons un triangle ABC et posons-nous la question suivante :

Trouver le lieu d'un point I *sachant que son réciproque* I_0 *et son inverse* I_2 *sont en ligne droite avec lui.*

---

dans cet article est représentée par des coordonnées normales ; mais, en prenant des coordonnées barycentriques, on a la conique de Kiepert ;

4° Neuberg (*J. M. S.*, 1886, p. 73) ;

5° Lemoine (*Annuaire de Grenoble*, 1885, et *Mathesis*, supplément du numéro de mai 1886) ;

6° Voyez aussi une petite note *sur le centre de la conique de Kiepert* (*J. M. S.*, 1886, p. 77).

(*) Le nombre k dans l'énoncé de la question 199 représente le rapport de la hauteur A'H, d'un des triangles isoscèles considérés, à la base correspondante BC.

(**) La question 199, telle qu'elle a été proposée par M. Boutin, n'en donne pas moins lieu à un excellent exercice de calcul ; la lettre de M. Lemoine nous dispense naturellement d'en publier une solution, puisqu'elle constitue la meilleure des réponses que pouvait soulever cette question ; mais nous engageons les élèves à la traiter, à titre d'exercice, et à vérifier, sur le résultat qu'ils trouveront, les propriétés que nous signalons plus loin.

Soient α, β, γ les coordonnées de I ; celles de I_0 sont $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$; et celles de I_2 $\frac{a^2}{\alpha}$, $\frac{b^2}{\beta}$, $\frac{c^2}{\gamma}$; si les trois points sont en ligne droite nous devons avoir

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{a^2}{\alpha} & \frac{b^2}{\beta} & \frac{c^2}{\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\Sigma\alpha^2(b^2 - c^2) = 0. \qquad (\Gamma)$$

La conique Γ qui correspond à cette équation passe : 1° par le centre de gravité de ABC (1, 1, 1) ; 2° par les points adjoints (— 1, 1, 1), (1, — 1, 1), (1, 1, — 1) ; c'est-à-dire par les sommets A″B″C″ du triangle anti-complémentaire de ABC (*) ; 3° par le centre du cercle inscrit au triangle ABC (a, b, c) et par ses adjoints.

En général lorsqu'une conique Γ est autopolaire à un triangle ABC, elle ne peut passer par un point sans passer par ses adjoints.

On peut vérifier l'identité du lieu que nous venons de trou-

(*) En se reportant à la notion des points complémentaires et anti-complémentaires dont nous avons parlé précédemment (*J. M. S.*, 1886, p. 79, et *J. M. É.*, 1886, p. 131), il est naturel d'appeler *triangle complémentaire* d'un triangle donné ABC celui qu'on obtient en joignant les milieux A′B′C′ d'un triangle donné et *triangle anti-complémentaire* la figure A″B″C″ obtenue en menant par les sommets de ABC des parallèles à ses côtés.

Je profite de cette occasion pour faire une rectification bibliographique relative aux points complémentaires.

Comme je l'ai dit (*J. M. É.*, p. 131), c'est dans le numéro d'octobre 1885 des *Archives de Grunert* que j'ai rencontré cette notion des points complémentaires. Mais une lettre de M. Neuberg, que j'ai reçue dernièrement, m'apprend que l'idée des points complémentaires remonte à Nagel et, dans le tome XLII des *Archives de Grunert*, Reuchle a introduit le terme commode de *couple de Nagel* pour désigner l'ensemble formé par un point et son complémentaire.

Dans cette lettre, M. Neuberg ajoute « les termes *points complémentaires* et *anti-complémentaires* sont très bien choisis et ils se prêtent commodément à désigner d'autres choses qui s'y rattachent ; telles sont les figures complémentaires et anti-complémentaires... » Les termes de triangle complémentaire et anti-complémentaire que je propose ici se rattachent à cette terminologie.

ver avec l'hyperbole de Kiepert, soit en s'assurant que ces deux coniques ont plus de quatre points communs (et ceci résulte de ce qui précède), soit en cherchant la figure complémentaire de Γ. Dans cette transformation, l'équation précédente devient

$$\Sigma(\beta + \gamma - \alpha)^2(b^2 - c^2) = 0,$$

ou

$$\Sigma\beta\gamma(b^2 - c^2) = 0;$$

c'est l'équation ordinaire de la conique de Kiepert. On conclut de là que l'équation (Γ) représente la conique de Kiepert du triangle A″B″C″.

L'équation (Γ) met encore en évidence quatre points de la conique de Kiepert.

On a en effet

$$\Sigma \cos^2 A(b^2 - c^2) \equiv \Sigma(1 - \sin^2 A)(b^2 - c^2),$$

$$\equiv \Sigma(b^2 - c^2) - \Sigma \sin^2 A(b^2 - c^2) \equiv \Sigma \sin^2 A(c^2 - b^2).$$

De cette remarque, il résulte que le point U

$$(\cos A, \quad \cos B, \quad \cos C)$$

et ses adjoints appartiennent à la conique en question.

Ce point U a déjà été signalé (*Mathésis*, 1886, p. 74), c'est le même que celui qui a pour coordonnées normales

$$\operatorname{cotg} A, \quad \operatorname{cotg} B, \quad \operatorname{cotg} C;$$

voici d'ailleurs comment on arrive, assez simplement, à la construction de U.

Soit H *l'orthocentre de* ABC; *la bissectrice de* BHC *rencontre* BC *en* A_1, *soit* A_2 *l'isotomique de* A_1; *les trois droites* AA_2 *concourent au point* U, etc.

M. Lemoine au congrès de Grenoble a signalé la propriété de l'hyperbole de Kiepert de passer par le centre de gravité du périmètre de A″B″C″, point qui se confond, comme l'on sait, avec le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Les seuls faits qui sont peut-être nouveaux, dans cette note, sont ceux qui peuvent se résumer ainsi :

La conique de Kiepert d'un triangle ABC *est autopolaire au triangle complémentaire* A′B′C′; *elle jouit de la propriété que tout point pris sur la courbe est en ligne droite avec son réciproque et son inverse, relativement à* A′B′C′. *Elle passe* (sans compter les points signalés par MM. Brocard, Lemoine et

Neuberg) *par les centres des cercles ex-inscrits au triangle* A'B'C', *par le point* U, *ci-dessus défini, et par ses adjoints, relativement à* A'B'C'.

G. L.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. TARRY.

Alger, 31 juillet 1886.

... Je vous remercie beaucoup de l'envoi de votre mémoire *sur un nouveau cercle remarquable*...

Je l'ai lu avec le plus vif intérêt, d'autant plus que votre manière d'envisager les cercles qui appartiennent au plan d'un triangle a beaucoup d'analogie avec ma manière exposée dans *Mathésis*.

En effet, en prenant

$$u = f(a, b, c), \qquad v = f(b, c, a), \qquad w = f(c, a, b),$$

vous obtenez un cercle remarquable, associé au triangle. De cette mine vous avez extrait le cercle Δ.

Dans ma méthode, u, v, w, pourraient représenter des lignes homologues de trois figures semblables, auxquelles correspond un cercle de similitude également remarquable.

Si u, v, w sont les côtés mêmes du triangle, le cercle considéré est le cercle de Brocard.

Il est à remarquer en outre que dans nos études le cercle circonscrit et le cercle des neufs points interviennent.

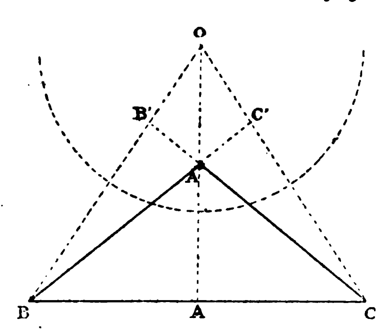
Il y a certainement beaucoup de rapports entre nos méthodes.

La vôtre est analytique et la mienne géométrique : les avantages et les inconvénients s'équilibrent.

Ne m'occupant absolument que de géométrie pure, je me suis naturellement amusé à chercher les démonstrations géométriques de quelques-uns de vos théorèmes.

Comme il peut vous être agréable de les connaître, je vais vous les communiquer, ces observations n'ayant peut-être pas été faites, malgré leur simplicité.

1° *Construire le cercle conjugué du triangle* ABC.



Soit O l'orthocentre. On a

$$OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = \rho^2.$$

Si donc du centre O on décrit un cercle de rayon ρ, ce cercle sera conjugué au triangle.

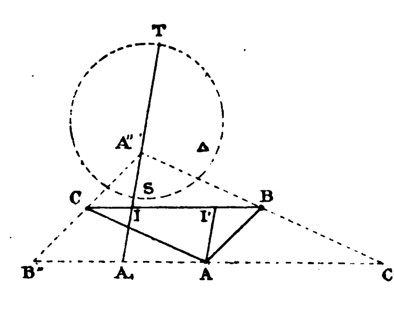
En effet AA′ est perpendiculaire à BC; A, A′ sont des points conjugués par rapport à ce cercle, et en ligne droite avec O; par conséquent, le sommet A est le pôle du côté opposé BC.

On voit aisément que l'on a les égalités suivantes:

$$OA' = -2R \cos A, \qquad OA = 2R \cos B \cos C,$$

d'où $\qquad OA.OA' = \rho^2 = -4R^2 \cos A \cos B \cos C.$

2° *Si l'on considère sur un des côtés* BC *du triangle* ABC *deux points isotomiques* I, I′ *sur* BC, *le cercle* Δ *est orthogonal au cercle décrit du point* I *comme centre, avec* AI′ *pour rayon.*



Soit A″B″C″ le triangle obtenu en menant par les sommets du triangle ABC des parallèles aux *côtés* opposés; le triangle *anti*-complémentaire, comme vous l'appelez.

On a évidemmeut AI′ = IA″ et I est le milieu de A_1A'',

Le cercle Δ étant le cercle conjugué de A″B″C″, coupe A_1A'' en deux points δ, T, qui divisent harmoniquement le segment A_1A''; on a donc

$$IS.IT = \overline{IA''}^2 = \overline{AI'}^2 \quad \text{(c. q. f. d.).}$$

Votre méthode générale a sur la mienne l'avantage incontestable d'être plus générale parce qu'elle est analytique.

Ainsi, je n'aurais pas trouvé votre cercle par ma méthode et vous pourriez trouver les miens par la vôtre.

Il est nécessaire, pour que Δ soit réel, que le point O tombe en dehors du triangle, ou que l'un des angles du triangle soit obtus.

Si les trois angles sont aigus, OA.OA′ est négatif, et le cercle paraît ne plus exister géométriquement.

Je crois être parvenu à représenter par un symbole géométrique les figures imaginaires; ou, tout au moins, *les coniques imaginaires.*

J'aurai l'honneur de vous adresser un mémoire, actuellement à l'imprimerie chez Gauthier-Villars, intitulé : *Représentation géométrique des coniques et quadriques imaginaires.*

Voici pour le cas qui nous occupe comment je représente le cercle conjugué imaginaire, quand le produit OA.OA′ est négatif.

Du centre O, avec un rayon égal à $\sqrt{-\, \mathrm{OA}.\mathrm{OA}'}$, je décris un cercle que je trace en rouge (pour le distinguer d'un cercle réel et pour marquer ainsi que ce cercle est un pur symbole).

Ce symbole me permet de trouver toutes les propriétés du cercle imaginaire qu'il représente.

Ainsi, la polaire d'un point E, par rapport au cercle imaginaire représenté par le cercle rouge, est la polaire, par rapport au cercle rouge (supposé réel), du point E′ symétrique par rapport au centre du cercle.

Avec cette convention, votre droite δ ne disparaît pas ; elle est la polaire par rapport au cercle rouge du point symétrique du centre de gravité E par rapport au centre du cercle rouge.

Toute conique imaginaire a la forme d'une ellipse rouge, et l'étude du cercle Δ se prête admirablement à la démonstration de l'utilité de mon mode de représentation...

QUESTION D'EXAMEN

10. — *Équation du plan tangent pour les surfaces unicursales.*

Soient u et v deux paramètres arbitraires et indépendants; les coordonnées d'un point de la surface unicursale sont

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

Les équations de la droite qui passe par les points x, y, z; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sont

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}. \tag{1}$$

D'autre part, en désignant par u et v les valeurs des paramètres qui donnent x, y, z; et par $u + du$, $v + dv$ celles qui correspondant aux valeurs $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, on a :

$$dx = \frac{df}{du}du + \frac{df}{dv}dv,$$

$$dy = \frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv,$$

$$dz = \frac{d\psi}{du}du + \frac{d\psi}{dv}dv,$$

formules dans lesquelles du et dv désignent deux infiniment petits *arbitraires* et du même ordre infinitésimal.

Enfin, si l'on désigne par $\frac{1}{\lambda}$ la valeur commune des rapports (1), ceux-ci pourront s'écrire

$$\frac{X - x}{\frac{df}{du}du + \frac{df}{dv}dv} = \frac{Y - y}{\frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv} = \frac{Z - z}{\frac{d\psi}{du}du + \frac{d\psi}{dv}dv} = \frac{1}{\lambda}.$$

On obtient ainsi trois relations linéaires et homogènes, par rapport aux paramètres variables λ, du, dv; le lieu décrit par la tangente mobile considérée est donc le plan représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{df}{du} & \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\psi}{du} \\ \frac{df}{dv} & \frac{d\varphi}{dv} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} = 0.$$

(A suivre.)

QUESTION 18

Solution par M. Léon Clément, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Rouen (*).

Trouver le lieu du point M *dont la distance à une ligne fixe* Δ *est dans un rapport donné avec la somme ou la différence de ses distances à deux points fixes* A, B.

Pour fixer les idées, adoptons le cas où l'on considère la *somme* MA + MB.

Prenons pour axe des x la droite joignant les deux points fixes, et pour axe des y la perpendiculaire à Δ menée par le milieu de AB.

Soit X = o l'équation de Δ. Considérons un point M du lieu (de coordonnées x, y); et soit $2a$ la somme des distances du point M aux points A et B. Si l'on pose AB = $2c$, le point M se trouve sur l'ellipse :

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Soit MP la distance du point M à la droite CD ; on a

$$\mathrm{MP} = 2\lambda\mathrm{X},$$

λ étant une constante.

Si on appelle $\frac{\lambda}{k}$ le rapport donné, on a donc $\frac{2\lambda\mathrm{X}}{2a} = \frac{\lambda}{k}$, d'où

$$a = k\mathrm{X}.$$

Éliminant a entre cette relation et l'équation de la conique, on a l'équation du lieu du point M :

$$k^2\mathrm{X}^2.y^2 + (k^2\mathrm{X}^2 - c^2)x^2 = k^2\mathrm{X}^2(k^2\mathrm{X}^2 - c^2). \qquad (1)$$

C'est une équation du quatrième degré.

Dans le cas où l'on considère la différence MA — MB, on

(*) Cette solution nous a été adressée il y a déjà quelque temps ; nous avons tardé à la publier dans l'espérance, qui ne s'est pas réalisée, d'en recevoir d'autres. Cette remarque s'applique à plusieurs solutions de questions relativement anciennes, et qui, soit dans ce Journal, soit dans le Journal de *M. E.*, paraîtront prochainement.

substitue à l'ellipse que nous avons envisagée tout à l'heure une hyperbole et l'on retrouve l'équation (1), au signe près du second membre.

La discussion de cette équation générale semble offrir quelques difficultés ; mais on pourra facilement construire la courbe (1), en supposant que Δ est parallèle ou perpendiculaire à AB.

QUESTIONS PROPOSÉES

206. — L'ellipse inscrite au triangle ABC et ayant pour foyers le centre de gravité et le point K de Lemoine, touche les côtés en des points α, β, γ, tels que les deux segments $B\alpha$, $C\alpha$ sont proportionnels aux carrés des diamètres des cercles AKB, AKC. (*E. Vigarié.*)

207. — On donne deux droites fixes Δ, Δ', qui se coupent en A, et un point B sur Δ. D'un point C, mobile sur Δ', on abaisse sur Δ une perpendiculaire qui coupe cette droite en C'. A partir de C, on porte sur Δ, dans un sens déterminé, une longueur C'D constante. On demande :

1° L'enveloppe de CD;

2° Le lieu du point G d'intersection de CC' avec la perpendiculaire à CD issue du point B.

(*Troille,* élève au lycée de Grenoble.)

208. — Démontrer que l'expression

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

tend vers $\frac{2}{3}$, quand n croît indéfiniment. (*T.*)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

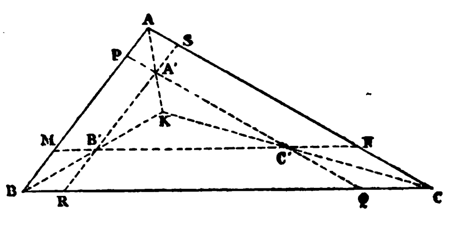
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 18670-6.

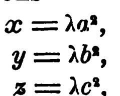
ÉQUATION GÉNÉRALE DES CERCLES DE TÜCKER (*)

Par **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

---

1. — Les côtés d'un triangle A'B'C' homothétique au triangle de référence ABC par rapport au point de Lemoine K peuvent être représentés, en coordonnées barycentriques, respectivement par les équations





$$x = \lambda a^2,$$
$$y = \lambda b^2,$$
$$z = \lambda c^2,$$

λ désignant le rapport BB' : $(a^2 + b^2 + c^2)$BK. La somme des trois coordonnées absolues d'un point étant égale à l'unité, on trouve aisément pour les coordonnées des points 1_2, 1_3 où BC est coupé par A'C', A'B' :

$1_2 \ldots 0, \quad \lambda b^2, \quad 1 - \lambda b^2; \qquad 1_3 \ldots 0, \quad 1 - \lambda c^2, \quad \lambda c^2.$

Exprimant que ces valeurs vérifient l'équation d'une circonférence :

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z) = 0,$$

on obtient

$$\mathrm{B} = -c^2a^2\lambda(1 - \lambda b^2), \qquad \mathrm{C} = -a^2b^2\lambda(1 - \lambda c^2).$$

La forme de ces égalités montre que si l'on pose

$$\mathrm{A} = -b^2c^2\lambda(1 - \lambda a^2),$$

la circonférence passe par les six points d'intersection 1_2, 1_3, 2_1, 2_3, 3_1, 3_2 des côtés non homologues des triangles ABC, A'B'C'. Donc l'équation d'un cercle de Tücker est (**)

$$\Sigma \frac{yz}{b^2c^2} - \lambda \Sigma x \Sigma\left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right)x = 0 \cdot \qquad (1)$$

(*) Voyez dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (1886; p. 195) une étude géométrique des cercles de Tücker, par M. E. Vigarié.

(**) Comparer *A group of circles*, by R. Tücker (*Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. XX).

L'axe radical de ce cercle et du cercle ABC a pour équation

$$\Sigma\frac{x}{a^2} - \lambda\Sigma x = 0\,;$$

il est donc parallèle à la droite de Lemoine et les centres des cercles de Tücker sont sur la droite OK.

L'équation (1) peut être écrite ainsi :

$$\lambda^2\Sigma^2 x - \lambda\Sigma x\Sigma\frac{x}{a^2} + \Sigma\frac{yz}{b^2c^2} = 0.$$

On en déduit l'équation de l'enveloppe des circonférences de Tücker, savoir

$$\Sigma^2\frac{x}{a^2} - 4\Sigma\frac{yz}{b^2c^2} = 0,$$

ou

$$\Sigma\frac{x^2}{a^2} - 2\Sigma\frac{xy}{a^2b^2} = 0.$$

Cette enveloppe est donc une ellipse qui touche les côtés de ABC aux pieds des symédianes et a, avec le cercle ABC, un double contact sur la droite de Lemoine.

2. — On peut arriver plus rapidement à l'équation (1).

Si l'on pose $I \equiv x + y + z$, les côtés du triangle A'B'C' ont pour équations

$$\frac{x}{a^2} - \lambda I = 0, \qquad \frac{y}{b^2} - \lambda I = 0, \qquad \frac{z}{c^2} - \lambda I = 0,$$

et toute cubique passant par les neuf intersections des côtés des triangles ABC, A'B'C' est représentée par

$$\left(\frac{x}{a^2} - \lambda I\right)\left(\frac{y}{b^2} - \lambda I\right)\left(\frac{z}{c^2} - \lambda I\right) - mxyz = 0. \qquad (2)$$

On obtient la cubique formée de la droite I passant par les intersections des côtés homologues, et de la conique passant par 1_2, 1_3, 2_1, 2_3, 3_1, 3_2 si l'on pose $m = \dfrac{1}{a^2b^2c^2}$. Le facteur I se sépare alors de l'équation et il reste l'équation (1).

3. — La même méthode sert à démontrer analytiquement un second mode de génération des cercles de Tücker.

Soient $A_tB_tC_t$ le triangle formé par les tangentes en A, B, C à la circonférence, et $\alpha\beta\gamma$ un triangle homothétique à $A_tB_tC_t$

par rapport à K. Les équations des côtés de ces triangles sont

$$\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}=0, \qquad \frac{z}{c^2}+\frac{x}{a^2}=0, \qquad \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=0,$$

$$\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}-\mu=0, \quad \frac{z}{c^2}+\frac{x}{a^2}-\mu_1=0, \quad \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}-\mu_2=0,$$

μ, μ_1, μ_2 étant des constantes. Si l'on retranche l'une de l'autre deux des dernières équations, on doit trouver les équations des symédianes; donc $\mu=\mu_1=\mu_2$. On voit facilement que l'axe d'homologie des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ a pour équation

$$H\equiv\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}-\mu=0\,;$$

c'est une parallèle à la droite de Lemoine. Les équations des côtés de $\alpha\beta\gamma$ étant mises sous la forme

$$H-\frac{x}{a^2}=0, \quad H-\frac{y}{b^2}=0, \quad H-\frac{z}{c^2}=0,$$

l'équation d'une cubique passant par les neuf intersections des côtés de ABC et $\alpha\beta\gamma$ est

$$\left(H-\frac{x}{a^2}\right)\left(H-\frac{y}{b^2}\right)\left(H-\frac{z}{c^2}\right)+mxyz=0.$$

Cette courbe se décompose en une droite H et une conique, si l'on prend $m=\dfrac{1}{a^2b^2c^2}$; on retrouve ainsi l'équation (1). On peut observer que la droite H est l'axe radical du cercle (1) et du cercle ABC.

4. Passons aux cas particuliers les plus remarquables.

A. On obtient le *premier cercle de Lemoine* en menant par K des parallèles à BC, CA, AB. On a alors $\lambda=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$; donc ce cercle a pour équation

$$\Sigma\frac{y^2}{b^2c^2}-\frac{x+y+z}{(a^2+b^2+c^2)^2}\,\Sigma\frac{b^2+c^2}{a^2}x=0.$$

B. Le *deuxième cercle de Lemoine* correspond au cas où les côtés de $\alpha\beta\gamma$ passent par K; le triangle A'B'C' est alors symé-

trique de ABC par rapport à K. Il faut maintenant poser $\lambda = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$, ce qui donne pour l'équation du cercle :

$$\Sigma \frac{y^2}{b^2c^2} - 2 \frac{x+y+z}{(a^2+b^2+c^2)^2} \Sigma \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2} x = 0.$$

C. Le *cercle de Taylor* conduit à des calculs intéressants.

Soient A_h, B_h, C_h les pieds des hauteurs de ABC, et pour avoir les mêmes notations qu'au 1°, soient :

1_3 et 1_2 les projections de B_h et C_h sur BC ;
2_1 et 2_3 — — C_h et A_h — CA ;
3_2 et 3_1 — — A_h et B_h — AB.

Cherchons les coordonnées barycentriques de ces points. On a $C1_3 = CB_h \cos C = a \cos^2 C$, $B1_3 = a - C1_3 = a \sin^2 C$; d'où les coordonnées de 1_3 :

$$x = 0, \quad y = \frac{C1_3}{CB} = \cos^2 C, \quad z = \frac{B1_3}{BC} = \sin^2 C.$$

On peut donc former le tableau suivant :

1_3 (0, $\cos^2 C$; $\sin^2 C$), 2_3 ($\cos^2 C$, 0, $\sin^2 C$) ;
2_1 ($\sin^2 A$, 0, $\cos^2 A$), 3_1 ($\sin^2 A$, $\cos^2 A$, 0) ;
3_2 ($\cos^2 B$, $\sin^2 B$, 0), 1_2 (0, $\sin^2 B$, $\cos^2 B$) ;

D'où l'on conclut que les droites 1_32_3, 2_13_1 3_21_2 ont pour

$$z = \sin^2 C, \qquad x = \sin^2 A, \qquad y = \sin^2 B,$$

et forment un triangle A'B'C' homothétique à ABC par rapport à K ; la valeur de λ (1°) est, visiblement, $\lambda = \frac{1}{4R^2}$ et celle du rapport de similitude des deux triangles A'B'C', ABC est

$$1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} = 2 \cos A \cos B \cos C - 1.$$

L'équation du cercle de Taylor est donc

$$\Sigma \frac{yz}{b^2c^2} - \frac{1}{16R^4} \Sigma x \Sigma x \operatorname{cotg}^2 A = 0.$$

Les coordonnées des points A', B', C' sont maintenant

$\cos(B+C)\cos(B-C)$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$;
$\sin^2 A$, $\cos(C+A)\cos(C-A)$, $\sin^2 C$;
$\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\cos(A+B)\cos(A-B)$.

Les droites 2_33_2, 3_11_3, 1_22_1 ont pour équations

$$-x + y \cot g^2 B + z \cot g^2 C = o, \text{ etc.}$$

elles joignent les milieux de deux côtés du triangle orthocentrique $A_hB_hC_h$ et ont pour longueur commune le demi-périmètre de ce triangle.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 209.)

CUBIQUES DIVERSES

Le tracé des cubiques unicursales (*) par la règle et l'équerre se prête naturellement à toutes ces cubiques, et celles que nous avons examinées jusqu'ici ne constituent qu'une faible partie des courbes de cette famille. Ne pouvant les considérer toutes, nous nous sommes attaché aux plus célèbres et aux plus simples et nous nous sommes borné à indiquer l'un des procédés généraux qui permettent de les obtenir toutes. Mais en quittant le tracé des cubiques nous voulons indiquer encore deux constructions qui conduisent à des cubiques que l'on rencontre assez fréquemment.

117. La cubique mixte. — Prenons un angle droit yox et une droite Δ parallèle à Oy; ayant effectué le tracé (1, 2, 3; *fig. 99*) et posé

$$OA = h, \ OI = \rho, \ IOx = \omega, .$$

Fig. 99.

(*) Voyez sur cette question un mémoire de M. P.-H. Schoute (*Annuaire de l'Association française*; p. 169, Congrès de Grenoble, 1885).

on trouve, pour l'équation du lieu décrit par I,

$$h = \rho \sin^2 \omega \cos \omega,$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$y^2 x = h(x^2 + y^2).$$

Cette cubique est une transformée conchoïdale de la parabole dans les conditions suivantes.

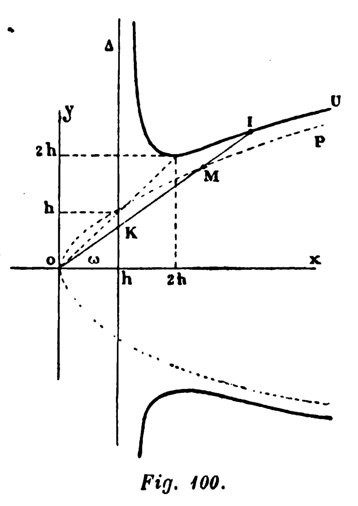


Fig. 100.

Considérons une parabole P représentée par l'équation $y^2 - hx = 0$; par le sommet O menons une transversale mobile qui rencontre la droite fixe Δ $(x - h = 0)$ en K; et la parabole P, en M; puis, prenons MI = OK et cherchons le lieu décrit par I.

Nous avons

$$OM = \frac{h \cos\omega}{\sin^2 \omega}, \quad OA = MI = \frac{h}{\cos \omega},$$

et, par suite

$$\rho = \frac{h \cos \omega}{\sin^2 \omega} + \frac{h}{\cos \omega} = \frac{h}{\sin^2 \omega \cos \omega}.$$

Le lieu décrit par le point I est donc la cubique trouvée plus haut, elle est constituée par *deux branches mixtes:* de forme hyperbolique, à l'une des extrémités; de forme parabolique, à l'autre; elle affecte l'apparence générale indiquée par la figure (*).

En considérant deux positions infiniment voisines de la transversale OKMI on obtient la tangente à U au point I par l'application évidente du principe des transversales réciproques.

La cubique qui vient de nous occuper peut encore être

(*) Les courbes P et U sont disposées, l'une par rapport à l'autre comme l'indique la figure, mais elles ne sont pas asymptotiques. La parabole asymptote de U est une parabole égale à P lorsqu'on a transporté celle-ci, de la droite vers la gauche, parallèlement à elle-même, à la distance h.

engendrée, point par point, au moyen de la construction (1, 2, 3, 4) indiquée par la figure ci-dessous. On est ainsi conduit à un certain point J.

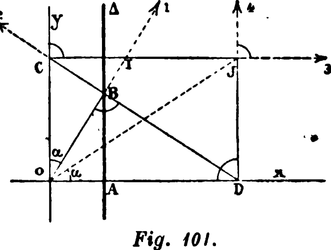


Fig. 101.

En observant que l'angle JOX est égal à BOC, on a

$$y = x \operatorname{tg} \alpha,$$

et

$$OC = y = \frac{OB}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Ces deux relations donnent, par combinaison,

$$y^2x = h\,(x^2 + y^2).$$

Ainsi, le lieu décrit par le point J est encore la courbe U que nous venons de considérer. Les parallèles à ox coupent cette courbe en deux points I et J qui se trouvent déterminés simultanément : l'un, par la première construction; l'autre, par la seconde. C'est un fait que nous avons rarement rencontré et qui semble assez curieux.

118. Remarque. — La cubique mixte qui vient de nous occuper affecte deux formes très différentes suivant que son point double est : isolé, comme dans le cas que nous avons examiné; ou situé sur les branches réelles de la courbe, comme dans celui que nous allons signaler.

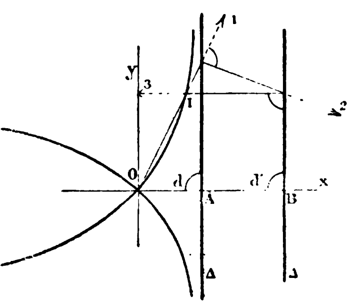


Fig. 102.

Considérons un angle droit yox et soient Δ, Δ′ deux parallèles à Oy; si nous effectuons la construction (1, 2, 3; *fig. 102*) nous obtenons un point I, dont le lieu géométrique, si l'on pose $OA = d$, $AB = d'$ est une courbe représentée par l'équation

$$y^2\,(d - x) = d'x^2.$$

Cette courbe est constituée encore par deux branches mixtes, mais, dans ce cas, elles passent par le point double.

119. La cubique conchoïdale. — Parmi les cubiques unicursales que l'on rencontre le plus fréquemment, nous citerons encore celles qui sont constituées par une branche conchoïdale et un point double isolé. Voici un exemple très simple de ces sortes de cubiques.

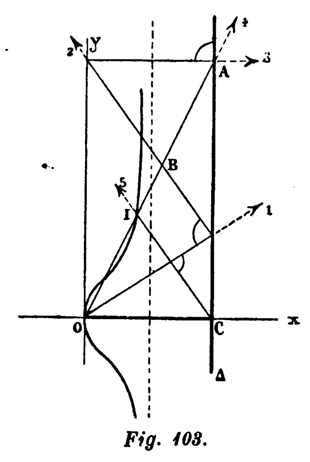


Fig. 103.

Considérons un angle droit yox, une droite Δ parallèle à Oy; effectuons la construction (1, 2, 3, 4, 5: *fig. 103*), le lieu du point I, comme on le vérifiera sans peine, est une cubique ayant pour équation

$$y^2 = (x - h)^2 \frac{x}{h - 2x}.$$

La courbe qui correspond à cette équation a la forme générale qu'indique la figure.

120. La conchoïdale circulaire. — Mais, parmi les conchoïdales, il y a lieu de remarquer celle qui est circulaire et qui s'obtient par la construction suivante.

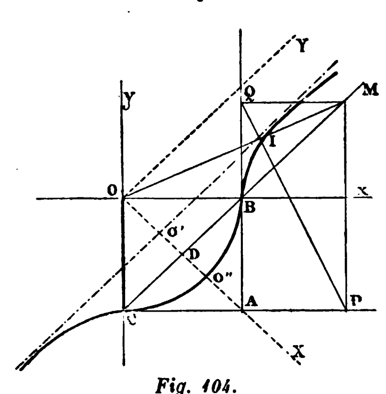


Fig. 104.

Soit CAB un triangle rectangle isocèle; on projette en Q et en P, sur ses côtés AB, AC un point M mobile sur l'hypoténuse BC. La perpendiculaire abaissée de M sur PQ va passer (*) par un point fixe O, quatrième sommet du carré construit avec le triangle proposé CAB et elle rencontre PQ en un point I dont le lieu géométrique est une cubique circulaire unicursale ayant pour équation, dans

(*) Voyez *Nouvelles Annales* 1843, p. 228.

le système yox,

$$(y-x)(y^2+x^2)+h(y^2+x^2-xy)=0, \quad (AB=AC=h)$$

courbe représentée, dans le système YOX, par l'équation

$$X(X^2+Y^2)=h\frac{\sqrt{2}}{4}(Y^2+3X^2).$$

L'asymptote réelle s'obtient en menant par O', milieu de OD, une parallèle à BC (*); le sommet O″ est au milieu de AD; les points B et C sont deux points d'inflexion réels de la courbe. La forme de celle-ci se trouve ainsi nettement indiquée.

Le tracé de la tangente se fait assez simplement en observant que l'on peut considérer le lieu du point I comme étant la podaire du point O par rapport à une certaine parabole, enveloppe des droites PQ; parabole qui a pour sommet O″ et pour foyer D; ce qui la détermine complètement.

121. Le Folium parabolique droit. — Cette courbe est une cubique unicursale caractérisée par les faits suivants

1° Elle admet une direction asymptotique unique;

2° Elle est droite;

3° Les tangentes au nœud sont rectangulaires.

Considérons un angle droit yox et une droite Δ parallèle à oy; posons $OA = h$. Si nous effectuons la construction

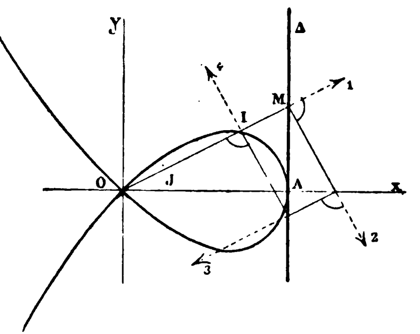


Fig. 105.

(1, 2, 3, 4; *fig. 105*) nous obtenons un point I dont le lieu est une courbe correspondant à l'équation

$$x^3 = h(x^2 - y^2).$$

(*) La courbe qui nous occupe ici a été, comme la plupart des cubiques simples, distinguée par Newton dans son *énumération des lignes du troisième ordre* et par Euler dans sa magistrale *introduction à l'analyse infinitésimale*. Elle a fait l'objet d'une note (*N. A.*, 1843, p. 316); le lecteur qui se reportera à cette note voudra bien rectifier la construction indiquée pour l'asymptote.

L'erreur en question a d'ailleurs été relevée (*N. A.*, 184; p. 299)

Si l'on prend $OJ = IM$, le lieu du point I est une cubique que nous avons examinée plus haut ($x^3 - hy^2 = o$) et nous savons construire la tangente à cette courbe au point J. L'application du principe des transversales réciproques permet de tracer la tangente au folium parabolique, au point I.

122. Le Folium parabolique oblique. — Cette cubique unicursale admet, comme la précédente, une direction asymptotique unique et un nœud droit; mais elle n'a plus d'axe de symétrie.

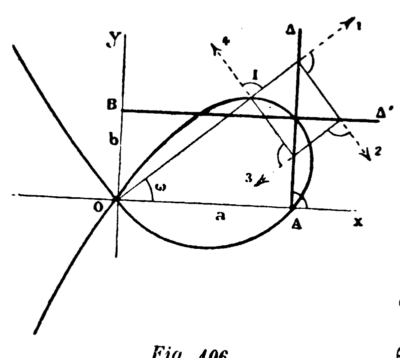


Fig. 106

Exposant $OA = a$, $OB = b$ et, en exprimant les diverses lignes de la figure au moyen de l'angle ω, on trouve sans peine l'équation polaire du lieu décrit par le point I

$$\rho = \frac{a}{\cos\omega} - \operatorname{tg}\omega \frac{a \operatorname{tg}\omega - b}{\cos\omega}.$$

L'équation cartésienne est donc

$$x^3 = a(x^2 - y^2) + bxy,$$

et celle-ci prouve que la cubique correspondante est un folium parabolique oblique, courbe que nous avons définie tout à l'heure.

CHAPITRE XII

LES QUARTIQUES UNICURSALES

Toutes les courbes unicursales sont évidemment susceptibles d'être tracées, point par point, au moyen de la règle et de l'équerre parce que, à un élément mobile, donné et convenablement choisi, ne correspond qu'un seul point de la courbe. Nous avons déjà fait cette remarque au chapitre précédent, mais nous y insistons encore à cause de son importance et nous allons montrer de nouveau, sur des exemples divers, l'application de cette idée générale.

Nous considérerons uniquement quelques quartiques unicursales.

123. Le Folium double. — Le Folium double est une quartique caractérisée par les propriétés suivantes :

1° Elle admet les directions isotropes comme directions asymptotiques doubles ;

2° Elle possède un point triple présentant la particularité d'un rebroussement pour deux des bras qui passent par ce point.

Il résulte de cette définition qu'en prenant l'origine au point triple, la tangente de rebroussement pour axe des y et des axes rectangulaires, l'équation du folium double est

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2(ax + by).$$

Voici comment on peut construire cette courbe point par point avec la règle et l'équerre.

Fig. 107.

Imaginons un angle droit AOB et soit (1, 2, 3, 4; *fig. 107*) une construction conduisant au point I en posant

$$OA = a, \qquad OB = b,$$
$$AI = \rho, \qquad MAO = \omega,$$

nous avons, par application du théorème des projections,

$$AM = a \cos \omega + b \sin \omega$$

et comme

Fig. 108.

$$\rho = AH \cos \omega = AM \cos^2 \omega,$$

nous pouvons écrire

$$\rho = a \cos^3 \omega + b \sin \omega \cos^2 \omega.$$

C'est l'équation polaire du lieu décrit par le point I ; l'équation cartésienne est donc

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2(ax + by).$$

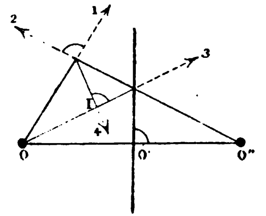


Fig. 109.

On peut distinguer deux espèces de foliums doubles : le folium droit, et le folium oblique ; suivant que la tangente de rebroussement est ou n'est pas un axe de symétrie.

Le folium double droit, qui correspond au cas particulier où l'on suppose $a = b$, est une courbe bien remarquable (*); les constructions (1, 2, 3, 4) des figures 108 et 109 conduisent encore au tracé du folium droit, point par point.

Dans cette dernière figure, on suppose $OO' = O'O''$.

124. Le limaçon de Pascal. — On sait que cette courbe se construit très rapidement, point par point, conformément à sa définition, si l'on s'accorde l'usage du compas à pointes sèches, puisqu'il suffit de porter sur un rayon vecteur mobile, à partir d'un point qu'on détermine, une longueur constante.

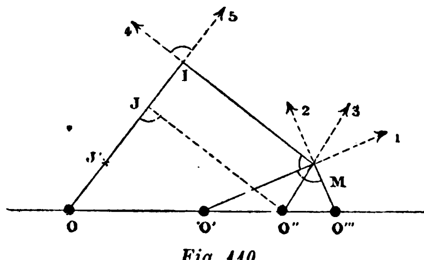


Fig. 110.

Mais on peut aussi, par le seul usage de la règle et de l'équerre, construire ces courbes; le tracé (1.2.3.4.5; *fig. 110*) donne un point I qui est un point d'un limaçon, considéré comme étant la podaire du point O par rapport à un cercle qui serait décrit du point O'', milieu de O'O''', comme centre, avec O''O' pour rayon.

Pour le tracé de la tangente (**) au limaçon, menons O''J parallèle à MI, et prenons J' isotomique de J sur OI; la tangente au lieu décrit par I sera partagée en deux parties égales par les tangentes θ, θ' aux lieux décrits par les points J et J' et cela par application du principe des transversales réciproques. Les points J et J' décrivent des circonférences; les centres sont: le milieu du segment OO'' pour l'une; et O, pour l'autre; or, nous savons, avec la règle et l'équerre, tracer les tangentes θ, θ'; nous saurons, par suite, construire celle du limaçon au point I.

(*) Nous nous proposons de publier prochainement une étude du folium double; nous donnerons alors diverses constructions de la tangente à cette courbe.

(**) Magnus a donné (*Journal de Crelle*, t. IX, 1832, p. 135) une construction de la tangente à la cardioïde; mais, cette construction exige l'emploi du compas, et elle ne s'applique qu'à ce limaçon particulier.

125. La Lemniscate (*). — Prenons sur deux axes rectangulaires donnés ox, oy, deux points fixes A et B, puis effectuons la construction (1, 2, 3, 4); le lieu du point I est une lemniscate.

En effet, on a

$\rho = OB' \cos \omega,$

$\rho = OA' \sin \omega:$

et

$OA'.OB' = OA.OB.$

En posant

$OA = a, \quad OB = b$

on obtient ainsi l'équation

$(x^2 + y^2)^2 = abxy,$

Fig. 111.

qui représente le lieu décrit par I ; la courbe qui correspond à cette équation passe doublement par les ombilics du plan ; de plus, le point O est un centre de la courbe et un nœud droit; le lieu considéré est donc une lemniscate (*C.M. S.*, t. II, p. 539).

On voit, en un mot, que nous venons de considérer la lemniscate comme la podaire du centre de l'hyperbole équilatère et, de cette génération remarquable, on déduit très simplement, comme nous allons le montrer, la normale, et par suite, la tangente à la lemniscate.

D'une façon générale, on sait (*C. M. S.*, t. II, p. 33) que si l'on considère une courbe quelconque U et, par rapport à cette courbe, la podaire d'un point O, la normale au lieu décrit par le point I passe par le milieu de MO, M étant le point de contact de la tangente considérée MI.

Cette remarque étant faite, reportons-nous à la figure 111 ; A'B' enveloppe une hyperbole ayant pour asymptotes Ox et

---

(*) On sait que la lemniscate représente un cas particulier des ovales de Cassini; voici, sur cette courbe célèbre quelques détails bibliographiques que nous empruntons à l'une de ces notes si intéressantes que le savant Terquem a jetées çà et là dans les *Nouvelles Annales*.

« Le nom de cette courbe dérive du mot grec λεμνισκος qui signifie une bandelette nouée en *huit*. Fagnano, (vers 1750) a découvert les principales propriétés de cette ligne qui est d'une si grande utilité dans la théorie des fonctions elliptiques. Les démonstrations du géomètre italien sont géométriques; la théorie analytique est due à Euler (*Mémoires de Saint-Pétersbourg*, t. V, p. 351). »

Oy; le point de contact de $A'B'$ avec cette hyperbole, c'est le milieu M de A'B', déterminée omme l'indique la figure. En achevant le rectangle qui correspond au triangle OIM on obtient un certain point C; IC est la normale à la lemniscate.

126. Le Trifolium droit. — Cette courbe est caractérisée par les propriétés suivantes :

1° Elle n'a pas d'autre direction asymptotiqne que les directions isotropes;

2° Elle admet un axe de symétrie Δ et un point triple O dont les tangentes sont : la perpendiculaire Δ' à l'axe Δ pour l'une des branches et les bissectrices des droites Δ, Δ' pour les deux autres.

D'après cela, l'équation du trifolium droit est

$$(x^2 + y^2)^2 = Ax(x^2 - y^2).$$

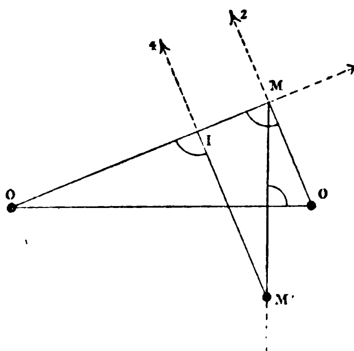


Fig. 112.

On a pris pour axes les droites Δ, Δ' que nous venons de définir et, dans cette équation, A désigne une constante.

Soit OO' un segment donné, effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig. 112*), construction dans laquelle M' est le symétrique de M par rapport à OO', et cherchons le lieu du point I.

En posant

$$OO' = d, \quad OI = \rho, \quad MOO' = \omega,$$

on a

$$\rho = d \cos \omega - 2d \sin^2 \omega \cos \omega,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 = dx(x^2 - y^2).$$

Le lieu du point I est donc un trifolium droit, courbe définie comme il vient d'être dit. Pour sa forme et pour le tracé de la tangente en un point pris sur elle, nous renverrons à notre *Traité de Géométrie analytique* (p. 512).

(A suivre.)

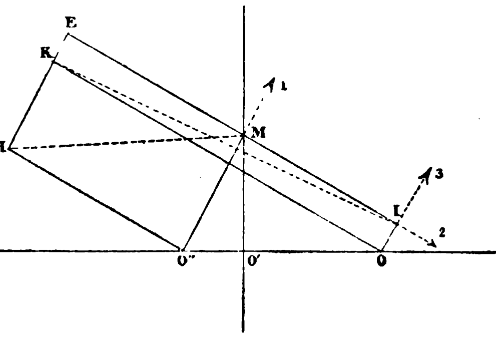
CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. D'OCAGNE la lettre suivante :

« Vous me citez très aimablement à la page 200 du dernier numéro du *Journal de Mathématiques spéciales;* mais je vous demanderai la permission de vous faire remarquer que l'article que vous mentionnez (*Nouvelles Annales*, 1886, p. 88) est la suite de mon Mémoire *sur l'enveloppe de certaines droites variables* dont la première partie a paru dans les *Nouvelles Annales* en 1883 (page 252). Je vous prie de vouloir faire cette rectification afin d'établir l'ancienneté de mes recherches, de beaucoup antérieures d'ailleurs à la publication de la première partie du Mémoire.

» Le problème que vous traitez (pages 200 et 201) se trouve à la fin de mon article intitulé : *Nouvelles remarques sur la droite de Simson* (*Journal de Mathématiques élémentaires,* 1885, p. 8 et 27) où je démontre (en me référant à vos notations de la page 201) que *le point* μ *divise* PQ *comme le point* M *divise le segment de la tangente correspondante à la courbe* U, *compris entre* Ox *et* Oy. (Voir le post-scriptum.)

» Enfin, je vous signalerai que le théorème du centre instantané de rotation donne une construction élégante de la normale à la *trisectrice de Maclaurin.*



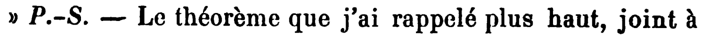
» MH perpendiculaire à O'M, O''H perpendicuailre à O''M donnent H centre instantané de rotation de l'angle droit O''MI.

» Donc, HE perpendiculaire à MI est normale à l'enveloppe de cette droite.

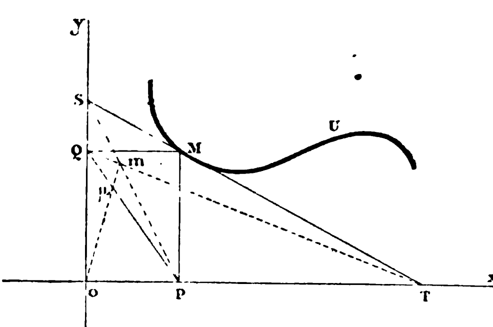
» OK perpendiculaire à OI donne avec HE :

» K centre instantané de rotation de l'angle droit EIO.

» Donc KI normale au lieu du sommet I, c'est-à-dire à la *trisectrice*...



» *P.-S.* — Le théorème que j'ai rappelé plus haut, joint à celui que j'ai proposé dans les *Nouvelles Annales* (question 1557, 1885, p. 536), montre que la construction du point μ (page 201 de votre article) est la suivante :



» *Les droites* PS *et* QT *se coupant en* m, *le point* μ *est à la rencontre de* PQ *et de* Om.

» Cette construction est plus simple que celle que vous donnez, dans laquelle interviennent deux perpendiculaires à tracer. »

Nota. — En remerciant M. d'Ocagne des remarques diverses qu'on vient de lire et qui ajoutent à l'intérêt que peuvent avoir les articles cités, je lui ferai observer que l'ancienneté relative de ses recherches n'était nullement discutable, puisque, dans la crainte d'un malentendu, j'avais pris soin, la chose étant à ma connaissance, de dire que sa note, publiée seulement en 1886, était écrite *depuis plusieurs années*. Le lecteur, en se reportant à la source citée, aurait vu d'ailleurs que la nouvelle note faisait suite à celle qui avait paru en 1883; je ne croyais pas une ambiguïté quelconque possible sur ce point, mais je publie bien volontiers la réclamation précédente; la propriété scientifique ne saurait être trop scrupuleusement respectée.

G. L.

QUESTIONS D'EXAMENS

11. — *Lieu des sommets des coniques Γ qui passent par quatre points donnés. De quel degré sera le lieu.*

Le réseau des coniques Γ renferme un paramètre variable λ, mais au premier degré seulement; il est représenté par l'équation

$$f = U + \lambda V = 0, \qquad (1)$$

U et V désignant des fonctions du second degré en x et y, indépendantes de λ.

On sait que le faisceau quadratique des axes est donné par l'égalité

$$f_x'^2(A' \cos\theta - B'') + f_x' f_y'(A - A') + f_y'^2(B'' - A\cos\theta) = 0.$$

Cette équation est du troisième degré par rapport aux coefficients de (1); elle renferme donc λ au troisième degré, du moins en général. On peut donc l'écrire sous la forme

$$M\lambda^3 + N\lambda^2 + P \ + Q = 0, \qquad (2)$$

M, N, P, Q désignant des fonctions du second degré en x et y.

L'élimination de λ entre (1) et (2) prouve que le lieu cherché est, en général, du *huitième degré*.

Il va sans dire que l'ordre du lieu en question peut s'abaisser dans certains cas; lorsqu'on fait abstraction des lieux impropres ou singuliers qut sont inhérents à la question particulière que l'on traite.

Pour exprimer qu'un point M est le sommet d'une conique f, on écrit que la normale en M passe par le centre de f; et l'on cherche le lieu des points communs à cette droite et à la conique. C'est ainsi qu'en cherchant le lieu des sommets des coniques circonscrites à un quadrilatère inscrit à un cercle γ on trouve ce cercle comme lieu singulier.

Un autre exemple bien connu, lui aussi, est celui où l'on propose de trouver le lieu des sommets des coniques circonscrites à un *losange*.

La conique singulière formée par les diagonales de ce

losange fait doublement partie du lieu et l'on trouve que le lieu propre est la quartique φ qui correspond à l'équation

$$(x^2 + y^2)(b^2x^2 - a^2y^2) - a^2b^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Cette courbe φ est constituée par un double folium en forme de lemniscate et par deux branches hyperboliques dont la sinuosité diffère suivant que l'on suppose :

$$b > \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \text{ou} \quad b < \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

On peut aussi séparer, sur φ, les points qui proviennent des ellipses ou des hyperboles du réseau considéré, en abaissant du centre du losange des perpendiculaires sur ses côtés.

Pour citer un cas d'abaissement encore plus remarquable, on peut, à ce propos, rappeler que *le lieu des sommets des coniques qui touchent deux droites rectangulaires* ox, oy *en deux points* A, B (OA = OB = a) *est une parabole.*

L'équation de cette parabole est $(y - x)^2 - a(x + y) = 0$, et les facteurs singuliers sont, dans cet exemple : 1° le cercle inscrit à l'angle yox aux points A et B; 2° la droite AB considérée comme droite double; 3° les axes ox, oy.

Remarque. — La théorie des caractéristiques permet d'apercevoir immédiatement le résultat précédent.

En effet, les caractéristiques des coniques passant par quatre points sont :

$$\mu = 1, \qquad \nu = 2\,;$$

Or, on sait (*) que dans un système (μ, ν) le lieu des sommets des coniques du réseau est une courbe de l'ordre

$$2\mu + 3\nu.$$

Dans le cas présent, on a

$$2\mu + 3\nu = 2 + 6 = 8.$$

12. — *On considère la courbe* U *qui, en coordonnées polaires, correspond à l'équation*

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, tome LVIII; séances du 1er et du 15 février 1864.

La note citée porte, par erreur,

$$2(2\mu + \nu),$$

Cette inexactitude a d'ailleurs été relevée par Chasles lui-même (séances des 27 juin, 4 et 18 juillet 1864).

$$\frac{1}{\rho} = (\omega - \alpha)(\omega - \beta);$$

démontrer : 1° qu'une droite Δ, *issue de l'origine, rencontre cette courbe en des points* A_1, A_2, ... *en nombre infini, 2° que les tangentes à* U, *en ces points, enveloppent une même conique.*

Soit ω_1 une valeur particulière de ω; en posant

$$\omega_i = 2k\pi + \omega_1 \qquad (k \text{ entier})$$

on obtient pour ρ des valeurs réelles, quel que soit k, et différentes. Ainsi, sur Δ, il y a une infinité de points réels.

Prenons l'un quelconque de ces points A_i; la tangente Δ correspondante est représentée par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_i}\cos(\omega - \omega_i) + \left(\frac{1}{\rho_i}\right)' \sin(\omega - \omega_i),$$

égalité qui peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = (2k\pi + \omega_1 - \alpha)(2k\pi + \omega_1 - \beta)\cos(\omega - \omega_1$$
$$+ (4k\pi + 2\omega_1 - \alpha - \beta)\sin(\omega - \omega_1).$$

En posant

$$2k\pi + \omega_1 = \lambda,$$

cette équation devient

$$1 = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(x\cos\omega_1 + y\sin\omega_1)$$
$$+ (2\lambda - \alpha - \beta)(y\cos\omega_1 - x\sin\omega_1).$$

Supposons que λ varie; cette équation, étant du second degré en λ, prouve que, par un point du plan, passent deux des droites qui lui correspondent; en d'autres termes, l'enveloppe des droites (1) est une conique et, de cette remarque, on déduit l'intéressante propriété en question.

QUESTION 26

Solution par M. X. Barthe, au Lycée de Montauban.

Soit f(x, y, z) = 0 *l'équation d'un paraboloïde; trouver l'équation donnant les paramètres des paraboles principales.*

Cette question est bien connue, nous rappellerons rapidement comment on la résout.

Prenons l'équation du paraboloïde elliptique sous la forme réduite

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0; \qquad (1)$$

les paramètres des paraboles principales sont alors égaux à p et q.

D'après les notations adoptées (*C. M. S.*, t. III) la quantité $\frac{H}{\Delta_0}$ est un invariant; mais pour la forme (1) puisque les axes sont rectangulaires $\Delta_0 = 1$ et le hessien est égal à $\frac{1}{pq}$.

On a donc

$$\frac{1}{pq} = \frac{H}{\Delta_0},$$

et aussi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{A + A' + A''}{\Delta_0};$$

par suite, $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ sont les racines de l'équation

$$\Delta_0 X^2 - (A + A' + A'')X + H = 0.$$

En considérant le paraboloïde hyperbolique, on obtiendrait la même équation, seulement les racines seraient alors $\frac{1}{p}$ et $-\frac{1}{q}$.

QUESTION 33

Solution par M. X. Barthe, au Lycée de Montauban.

Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique quatre normales formant un faisceau harmonique.

Prenons le cas de l'ellipse et soient x, y les coordonnées d'un point du lieu; les coefficients angulaires des normales menées par ce point sont les racines de l'équation

$$y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}},$$

qu'on peut écrire

$$m^4b^2x^2 - 2b^2m^3xy + m^2(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4) - 2ma^2xy + a^2y^2 = 0.$$

Soient m_1, m_2, m_3, m_4 les quatre racines de cette équation; les relations entre les coefficients et les racines donnent

$$\left\{\begin{aligned} \sum m_1 &= \frac{2b^2xy}{b^2x^2}, \\ \sum m_1m_2 &= \frac{a^2x^2 + b^2y^2 - c^4}{b^2x^2}, \\ \sum m_1m_2m_3 &= \frac{2a^2xy}{b^2x^2}, \\ m_1m_2m_3m_4 &= \frac{a^2y^2}{b^2x^2}; \end{aligned}\right. \tag{1}$$

auxquelles il faut adjoindre :

$$2(m_1m_2 + m_3m_4) = (m_1 + m_2)(m_3 + m_4). \tag{2}$$

Pour obtenir le lieu demandé, il suffit d'éliminer m_1, m_2, m_3 et m_4 entre les relations (1) et (2).

Or ce problème a été résolu précédemment (voir *Journal*, année 1884, p. 282); dans le cas présent et en utilisant les notations de l'article cité, nous avons

$$\begin{aligned} A &= b^2x^2, \\ B &= \frac{b^2xy}{2}, \\ C &= \frac{a^2x^2 + b^2y^2 - c^4}{6}, \\ D &= \frac{a^2xy}{2}, \\ E &= a^2y^2. \end{aligned}$$

Transportant ces valeurs dans a condition trouvée (*loc. cit.*) on obtient, toutes réductions faites,

$$54a^4b^4x^2y^2 + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 = 0.$$

C'est une courbe du sixième degré possédant quatre points de rebroussement situés sur les axes, aux points mêmes de rebroussement de la développée de l'ellipse.

BIBLIOGRAPHIE

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, par M. Ch. BRISSE, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet, répétiteur de Géométrie descriptive à l'Ecole Polytechnique, avec nombreuses figures dans le texte et planches d'épures, (Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, 55, quai des Grands-Augustins).

Le premier fascicule vient de paraître; l'ouvrage sera complet en janvier prochain. Le prix, pour les souscripteurs actuels à l'ouvrage complet est fixé à 7 francs. Il sera légèrement augmenté, après LE MOIS de janvier.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES IMAGINAIRES, par M. Gaston TARRY (Gauthier-Villars).

Cette brochure, pleine d'intérêt est celle à laquelle il a été fait allusion dernièrement dans ce journal (p. 237). Elle est divisée en sept chapitres dont les titres donnent une idée du plan que l'auteur a suivi: *Points imaginaires conjugués. — Droites imaginaires conjuguées, droites idéales. — Définition complète des coniques, théorème fondamental. — Coniques conjuguées, théorèmes généraux. — Coniques conjuguées réciproques, coniques complémentaires, coniques et quadriques idéales. — Coniques supplémentaires.*

QUESTIONS PROPOSÉES

209. — Soit un triangle ABC;

M, N, P désignent les milieux des côtés BC, CA, AB.

J, K, L, ... les pieds des bissectrices issues des sommets ABC.

$H_a H_b H_c$ ... les pieds des hauteurs issues de A, B, C.

A′ B′ C′ ... les points de contact du cercle inscrit avec BC, CA, AB.

A″ B″ C″ ... les isotomiques de A′, B′, C′.

On propose de démontrer les propriétés suivantes :

1° *Les quatre droites* H_bH_c, B′C′, KL B″C″ *se rencontrent en un même point* θ_a.

Soient θ_b et θ_c les points analogues.

2° *Les côtés du triangle* $\theta_a\theta_b\theta_c$ *passent par les sommets* A, B, C *du triangle considéré.*

3° *Les quatre droites* $A\theta_a$. $A\theta_b$ θ_c, AB, AC *forment un faisceau harmonique.*

4° *Les triangles* ABC, $\theta_a\theta_b\theta_c$ *sont homologiques.*

(*Paul Bourgarel*, à Antibes.)

N.-B. — Si l'on traite cette question par les coordonnées barycentriques qui nous paraissent les coordonnées naturelles de cet intéressant exercice, on pourra vérifier que les droites : B'C', B''C'' (transversale réciproque de B'C'), KL, H_bH_c sont représentées respectivement par

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha\,(p-a) - \beta\,(p-b) - \gamma\,(p-c) = 0, \\ \dfrac{\alpha}{p-a} - \dfrac{\beta}{p-b} - \dfrac{\gamma}{p-c} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{a} - \dfrac{\beta}{b} - \dfrac{\gamma}{c} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{a}\cos A - \dfrac{\beta}{b}\cos B - \dfrac{\gamma}{c}\cos C = 0. \end{cases}$$

On trouve alors que ces droites concourent en un point θ_a, dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$a\,(\cos B - \cos C),\quad b\,(\cos A - \cos C),\quad c\,(\cos B - \cos A)$$

ou, si l'on préfère, à

$$a\,(c-b)\,(p-a),\quad b\,(c-a)\,(p-b),\quad c\,(a-b)\,(p-c).$$

Les trois points θ_a, θ_b, θ_c signalés dans cet exercice sont alors *algébriquement adjoints* à un certain point θ dont les coordonnées sont proportionnelles à $a\,(c-b)\,(p-a)$, $b\,(a-c)\,(p-b)$, $c\,(b-a)\,(p-c)$.

Les propriétés signalées par M. Bourgarel, ne sont plus, quand on a fait cette remarque, qu'une conséquence immédiate des théorèmes généraux que M. Lemoine a établis (*Journal*, 1885, p. 193).

Le point θ, qui apparaît ici, est un point remarquable du triangle; il est situé au point de concours des quatre droites représentées, respectivement par les équations (1), quand on a changé, dans celles-ci, les signes de β et de γ.

En considérant, en particulier, les équations

$$\alpha\,(p-a) + \beta(p-b) + \gamma\,(p-c) = 0,\quad \frac{\alpha}{p-a} + \frac{\beta}{p-b} + \frac{\gamma}{p-c} = 0,$$

on peut dire que θ est à l'intersection de la droite Δ, harmoniquement associée au point de Gergonne, avec la transversale réciproque de Δ.

G. L.

210. — On considère un cercle de rayon variable et de centre fixe O, et une droite fixe xOy qui coupe le cercle en deux points A et B. On porte de A vers O, sur xy, une longueur constante $AB = l$. Par le point C, on mène une droite inclinée à 45° sur OA; elle coupe le cercle en P, Q. Lieu de ces deux points. (*Troille.*)

211. — On considère un angle droit *yox* et par un point C, donné sur *oy*, on mène une droite Δ parallèle à *ox*.

Autour de O, on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent Δ aux points M et M′ et l'on imagine les deux paraboles U et V qui ont pour sommets, respectivement, les points M, M′; dont les axes sont MO et M′O; et qui passent par C.

Cela posé :

1° Trouver le lieu des points de rencontre des axes de U avec les paraboles V, ou des axes de V avec les paraboles U.

Ce lieu est un cercle.

2° Démontrer que le lieu des points P, Q, R communs aux paraboles U et V est un cercle.

3° Chercher le lieu des points de rencontre des directrices des paraboles U et V.

Ce lieu est une droite parallèle à *ox*.

4° Démontrer que les cinq points C,P,Q,R,O appartiennent à une certaine hyperbole équilatère H ayant pour centre le milieu de OC.

5° Trouver les lieux décrits par le centre de gravité et par l'orthocentre de PQR.

6° Les asymptotes de H rencontrent les axes des paraboles U et V en des points dont le lieu géométrique est un système de deux cercles. *(G. L.)*

Erratum. — La question qui a été proposée (p. 216) porte par erreur le n° 204, c'est 205 qu'il faut lire.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 21810-6.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

Par M. J. **Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

Connaissant les coordonnées barycentriques α. β, γ d'un point M, par rapport au triangle fondamental ABC, on peut se proposer de chercher les coordonnées barycentriques α', β', γ' de ce point par rapport à un triangle remarquable A'B'C', associé à ABC; les nouvelles coordonnées serviront souvent à établir l'identité du point M avec un point remarquable du triangle A'B'C',

Pour résoudre ce problème, il faut : 1° exprimer les côtés a, b, c, et les angles A, B, C du triangle primitif en fonction des côtés a', b', c' et des angles A', B', C' du nouveau triangle de référence; 2° exprimer les nouvelles coordonnées α', β', γ' en fonction des anciennes. Les dernières formules sont :

$$\alpha' = m\,(M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma),$$
$$\beta' = n\,(M_2\alpha + N_2\beta + P_2\gamma),$$
$$\gamma = p\,(M_3\alpha + N_3\beta + P_3\gamma).$$

où

$$M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma = 0, \ldots$$

sont les équations des droites B'C', C'A' A'B'; m, n, p sont des constantes que l'on peut déterminer en adaptant les formules à un point dont on connaît les coordonnées par rapport à ABC et A'B'C'. Il est évident qu'on peut débarrasser les constantes d'un facteur commun qui est fonction symétrique de a', b', c' ou a, b, c; car il ne s'agit ici que des rapports entre les coordonnées.

1. — A'B'C' *est le triangle complémentaire de* ABC. On a

$$a : b : c : = a' : b' : c',$$

$$\frac{\alpha'}{-\alpha+\beta+\gamma} = \frac{\beta'}{\alpha-\beta+\gamma} = \frac{\gamma'}{\alpha+\beta-\gamma}.$$

Application au point de Lemoine. On trouve

$$\frac{\alpha'}{a'^2 + b'^2 + c'^2} = \frac{\beta'}{a^2 - b'^2 + c'^2} = \frac{\gamma'}{a'^2 + b'^2 - c'^2},$$

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \cot A' : \cot B' : \cot C'.$$

Le point K *est donc, par rapport à* A'B'C', *le réciproque de l'orthocentre de* A'B'C' *ou le réciproque du centre du cercle circonscrit à* ABC.

2. — A'B'C' *est le triangle anti-complémentaire de* ABC. On a

$$a : b : c = a' : b' : c',$$

$$\frac{\alpha'}{\beta + \gamma} = \frac{\beta'}{\gamma + \alpha} = \frac{\gamma'}{\alpha + \beta}.$$

3. — A'B'C' *est le triangle orthocentrique de* ABC. Les relations entre les éléments des deux triangles sont

$$A = \frac{1}{2}(\pi - A'), \qquad B = \frac{1}{2}(\pi - B'), \qquad C = \frac{1}{2}(\pi - C'),$$

$$a : b : c : = \cos \frac{1}{2} A' : \cos \frac{1}{2} B' : \cos \frac{1}{2} C'$$

$$= \sqrt{a'(p' - a')} : \sqrt{b'(p' - b')} : \sqrt{c'(p' - c')}.$$

La première formule de transformation des coordonnées est

$$\alpha' = m\,(-\alpha \cot A + \beta \cot B + \gamma \cot C).$$

Appliquons-la au point A; alors $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha' =$ AB'C' : A'B'C' ou $\alpha' = \cos^2 A$, si on néglige un facteur *symétrique*. Par conséquent, $m = \sin 2A$. On a donc

$$\alpha' = \sin 2A\,(-\alpha \cot A + \beta \cot B + \gamma \cot C),$$

$$\beta' = \sin 2B\,(\alpha \cot A - \beta \cot B + \gamma \cot C),$$

$$\gamma' = \sin 2B\,(\alpha \cot A + \beta \cot B - \gamma \cot C),$$

ou encore

$$\alpha' = \sin A'\left(-\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} A' + \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} B' + \gamma \operatorname{tg} \frac{1}{2} C'\right), \text{etc.}$$

Application. — S'il s'agit du point de Lemoine K de ABC, on trouve

$$\alpha' = \frac{1}{2} \sin 2A\,(-\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$= \sin A \cos A . 4 \sin A \cos B \cos C;$$

donc

$$\alpha'' : \beta' : \gamma' = \sin^2 A : \sin^2 B : \sin^2 C$$

$$= \cos^2 \frac{1}{2} A' : \cos^4 \frac{1}{2} B' : \cos^2 \frac{1}{2} C',$$

$$\frac{\alpha'}{a'} : \frac{\beta'}{b'} : \frac{\gamma'}{c'} = \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C$$

$$= \cot \frac{1}{2} A' : \cot \frac{1}{2} B' : \cot \frac{1}{2} C'.$$

Parmi les conséquences de ces formules, nous signalons les suivantes :

Les points de Lemoine K *et* K' *des triangles* ABC, A'B'C' *sont en ligne droite avec l'orthocentre* H *de* ABC (*).

Le point de Lemoine d'un triangle ABC *est le centre de trois forces parallèles, proportionnelles à* a^2, b^2, c^2 *et appliquées, soit aux sommets de ce triangle, soit aux pieds des hauteurs, soit en trois points divisant les hauteurs de* ABC *dans un même rapport.*

Les distances du point de Lemoine du triangle ABC *aux côtés du triangle orthocentrique* A'B'C' *sont inversement proportionnelles aux rayons des cercles exinscrits à* A'B'C'*; autrement dit, si* $A_1B_1C_1$ *est le triangle formé par les tangentes aux points* A,B,C *de la circonférence* ABC, *le centre d'homothétie des triangles* $A_1B_1C_1$ *et* A'B'C', *est, par rapport au triangle* A'B'C', *l'inverse du point de Lemoine de* ABC.

4. — A'B'C' *est le triangle formé par les bissectrices extérieures de* ABC (**). Les formules cherchées sont

---

(*) On peut écrire : $\alpha' : \beta' : \gamma' = a'p' - a'^2 : b'p' - b'^2 : c'p' - c'^2$; donc le point K est en ligne droite avec les points H (a', b', c') et K' (a'^2, b'^2, c'^2). On voit aussi que KH : KK' $= a'^2 + b'^2 + c'^2 : 2p'^2$.

Ce théorème est dû à M. Edm. Van Aubel (*Mathesis*, t. I, p. 190).

(**) Ce triangle peut être appelé *triangle antiorthocentrique* de ABC ou *triangle anti-supplémentaire* de ABC. Le *triangle supplémentaire* a pour sommets les pieds des bissectrices intérieures de ABC.

Lorsque les coordonnées *normales* de deux points M (x, y, z) et M' (x', y', z') sont liées par les relations

$$\frac{x'}{y+z} = \frac{y'}{z+x} = \frac{z'}{x+y},$$

on peut dire que M' est le *supplémentaire* de M. L'expression de *points complémentaires* est réservée à des points dont les coordonnées barycentriques vérifient les égalités précédentes.

La figure supplémentaire de la circonférence ABC est une conique dont les propriétés, assez curieuses, ont fait l'objet d'une communication présentée par M. de Longchamps au congrès de Nancy. La figure anti-supplémentaire de cette circonférence est la circonférence passant par les centres des cercles exinscrits au triangle ABC.

$$A = \pi - 2A', \qquad B = \pi - 2B', \qquad C = \pi - 2C'$$

$$a : b : c = \sin 2A' : \sin 2B' : \sin 2C',$$

$$\alpha' = \text{tg}\, A\left(\frac{\beta}{\sin B} + \frac{\gamma}{\sin C}\right) = -\,\text{tg}\, 2A'\left(\frac{\beta}{\sin 2B'} + \frac{\gamma}{\sin 2C'}\right), \ldots$$

5. — A′B′C′ *est le triangle polaire de* ABC *par rapport à la circonférence circonscrite.* Les formules demandées sont

$$A = \frac{1}{2}(\pi - A'), \quad B = \frac{1}{2}(\pi - B', \quad C = \frac{1}{2}\pi - C'),$$

$$a : b : c = \cos\frac{1}{2}A' : \cos\frac{1}{2}B' : \cos\frac{1}{2}C',$$

$$\alpha' = \cos A\left(\frac{\beta}{\sin^2 B} - \frac{\gamma}{\sin^2 C}\right) = \text{tg}\frac{1}{2}A'\left(\frac{\beta'}{\cos^2\frac{1}{2}B'} + \frac{\gamma}{\cos^2\frac{1}{2}C'}\right), \ldots$$

Si l'on échange les rôles des deux triangles, on trouve

$$\alpha' = \sin^2 A'\,(-\,\alpha\,\text{tg}\,A' + \beta\,\text{tg}\,B' + \gamma\,\text{tg}\,C'), \ldots$$

6. — A′B′C′ *est le complémentaire du triangle orthocentrique de* ABC.

Le triangle A′B′C′ qui a pour sommets les milieux du triangle orthocentrique $A_hB_hC_h$ de ABC, jouit de propriétés assez curieuses : Les points H, A, B, C sont le point de Nagel et les adjoints de ce point, du triangle A′B′C′, et les côtés non homologues des triangles ABC, A′B′C′ se coupent en six points d'une même circonférence ayant pour centre le centre du cercle inscrit à A′B′C′ (*circonférence de Taylor de* ABC).

On obtient les formules relatives à ce triangle en combinant les transformations 3° et 2°; ce qui donne

$$A = \frac{1}{2}(\pi - A'), \quad B = \frac{1}{2}(\pi - B'), \quad C = \frac{1}{2}(\pi - C'),$$

$$a : b : c = \cos\frac{1}{2}A' : \cos\frac{1}{2}B' : \cos\frac{1}{2}C',$$

$$\alpha' = \cot A\,(-\,\alpha + \beta\cot^2 B + \gamma\cot^2 C),$$

$$\beta' = \cot B\,(\alpha\cot^2 A - \beta + \gamma\cot^2 C),$$

$$\gamma' = \cot C\,(\alpha\cot^2 A + \beta\cot^2 B - \gamma).$$

Application. — Si l'on applique ces formules au point de Lemoine, on trouve

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \cot A : \cot B : \cot C$$
$$= \operatorname{tg} \frac{1}{2} A' : \operatorname{tg} \frac{1}{2} B' : \operatorname{tg} \frac{1}{2} C'.$$

Il résulte de là que *le point de Lemoine de* ABC *est le point de Gergonne de* A'B'C', *ou que les symédianes du triangle* ABC *passent par les points de contact des côtés de* A'B'C' *avec le cercle inscrit.*

7. — A'B'C' *est le triangle orthocentrique du complémentaire de* ABC.

On rencontre ce triangle dans l'étude du point A de Brocard (le réciproque de l'orthocentre de ABC et l'anti-complémentaire du point de Lemoine). On a

$$\frac{\alpha'}{\sin 2A} = \alpha(\cot A + \cot B + \cot C)$$
$$+ \beta(-\cot A - \cot B + \cot C)$$
$$+ \gamma(-\cot A + \cot B + \cot C), \text{ etc.}$$

SUR UN MODE PARTICULIER DE GÉNÉRATION DES CONIQUES

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

---

1. — Supposons donnés un cercle Γ et une droite Δ. Par le centre O du cercle Γ menons une droite qui coupe ce cercle au point M et la droite Δ au point M_1. Posons $OM = \rho$, $OM_1 = \rho_1$, et prenons sur la droite OMM_1, le point M_2 tel que son rayon vecteur $OM_2 = \rho_2$ soit donné par

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}. \qquad (1)$$

On peut énoncer différemment cette construction. En effet, soit Γ' le cercle de centre O dont le rayon ρ' est double du rayon ρ du cercle Γ. On aura

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{\rho'}.$$

c'est-à-dire que le point M_2 est le conjugué harmonique du point M_1 par rapport aux points O et M', M' étant le point où OM_1 coupe le cercle Γ'.

Le point M_2, défini de l'une ou l'autre manière, engendre une courbe lorsque la droite D pivote autour du point O. Je dis que cette courbe est une conique.

En effet, soit Δ' la droite symétrique de la droite Δ par rapport au point O. Du point M_2 abaissons la perpendiculaire PP' sur les droites Δ et Δ'. Nous avons, en appelant h la distance du point O à la droite Δ,

$$M_2P' = 2h - PM_2$$
$$= 2h - \frac{h(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}$$
$$= \frac{h(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1}.$$

Donc

$$\frac{M_2P'}{M_2O} = \frac{h(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1\rho_2},$$

ou, en vertu de (1),

$$\frac{M_2P'}{M_2O} = \frac{h}{\rho}.$$

Par suite, le rapport des distances du point M_2 à la droite Δ' et au point O est constant, et *le lieu du point* M_2 *est une conique ayant le point* O *pour foyer et la droite* Δ' *pour directrice correspondante.*

Cette conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le rapport constant $\frac{h}{\rho}$ est supérieur, inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire suivant que la droite Δ est extérieure, en partie intérieure ou tangente au cercle Γ.

On voit que, dans tous les cas, la conique passe par les extrémités du diamètre du cercle Γ qui est parallèle à la droite Δ (*).

2. — La formule (1) montre que le mode de génération des coniques ici envisagé rentre dans la troisième transformation générale étudiée dans mon Mémoire *sur les transformations générales des courbes planes* (**).

Par le point O élevons à la droite OM une perpendiculaire qui coupe en T_1 la droite Δ et en T_2 la tangente à la conique (M_2) au point M_2. La formule (22) du Mémoire cité donne

$$\frac{1}{OT_1} + \frac{1}{OT_2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$OT_2 = -OT_1.$$

Le point T_2 se trouve donc sur la droite Δ' symétrique de Δ par rapport à O, c'est-à-dire sur la directrice de la conique (M_2) correspondant à un foyer O. Dès lors, on tombe sur ce théorème connu :

La tangente en un point d'une conique passe par le point où la perpendiculaire menée par l'un des foyers au vecteur du point considéré, issu de ce foyer, coupe la directrice correspondante.

(*) La relation

$$\frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM_2} = \frac{1}{OM}$$

peut s'écrire

$$OM.OM_2 + OM.OM_1 = OM_1.OM_2,$$

ou, en ajoutant et retranchant $\overline{OM}^2$

$$OM_1.OM_2 - OM.OM_2 - OM.OM_1 + \overline{OM}^2 = \overline{OM}^2,$$

c'est-à-dire

$$(OM_1 - OM)(OM - OM_2) = \overline{OM}^2$$

ou encore

$$MM_1.MM_2 = \overline{OM}^2,$$

ce qui démontre le théorème proposé pour le cas de l'ellipse seulement par M. Antomari dans la question 77. (Voir la solution qui a été donnée dans le n° de décembre 1885, p. 279.) C'est précisément cette question, si facilement résolue par le procédé qui vient d'être indiqué, qui nous a suggéré l'idée de publier cette note dont nous possédons les éléments depuis longtemps. — M. D'O.

(**) *Mathesis*, t. V, 1884, p. 73 et 97.

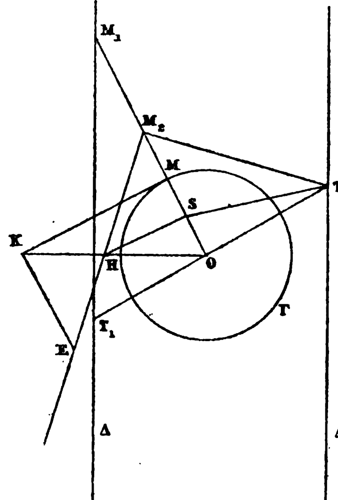
3. — La formule (23) du même Mémoire donne, en appelant R le rayon de courbure à la conique (M_2) au point M_2.

$$\frac{1}{R \sin^3 \widehat{OM_2T_2}} = \frac{1}{\rho}$$

ou

$$\frac{R}{OM} = \frac{\overline{M_2T_2}^3}{\overline{OT_2}^3}.$$

Menons la normale en M_2 à la conique, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en M_2 à M_2T_2.



Si nous tirons la symédiane T_2S du triangle OT_2M_2, nous avons, en vertu d'un théorème démontré dans ma première étude sur la symédiane (*), SH étant perpendiculaire à OM, et le point H appartenant à la normale en M_2,

$$\frac{R}{OM} = \frac{M_2H}{OS}$$

ou

$$\frac{R}{M_2H} = \frac{OM}{OS}.$$

La droite OH coupant au point K la tangente en M, au cercle (Γ), on a

$$\frac{OM}{OS} = \frac{OK}{OH}.$$

Par le point K menons une parallèle à OM ; cette droite coupe la normale M_2H au point E, on a

$$\frac{M_2E}{M_2H} = \frac{OK}{OH} = \frac{OM}{OS}.$$

Donc,

$$M_2E = R,$$

(*) Voir *Nouv. Ann. de Mathém.* (3me série, t. II, 1883, p. 454) et ma *Monographie de la symédiane* (*Journal de Math. élém.*, 1885, p. 193, théorème 6).

et le point E est le centre de courbure, répondant au point M_2.

On peut énoncer ainsi ce résultat.

Si la perpendiculaire élevée à OM, *par le pied de la symédiane du triangle* OT_2M_2, *issue de* T_2, *coupe en* H *la normale en* M_2 *à la conique* (M_2), *et que la droite* OH *coupe en* K *la tangente en* M *au cercle* Γ, *le centre de courbure répondant au point* M_2 *se trouve sur la parallèle au vecteur* OM_2 *menée par le point* K.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 245.)

127. Le Folium simple. — Parmi les quartiques remarquables, nous signalerons encore le Folium simple ; cette courbe correspond à la définition suivante :

1° Les directions isotropes sont les seules directions asymptotiques de la courbe;

2° Elle possède un point triple et les tangentes en ce point sont coïncidentes.

D'après cette définition, en prenant convenablement les axes, l'équation du Folium simple est $(x^2 + y^2)^2 = Ax^3$ (1), A étant une constante.

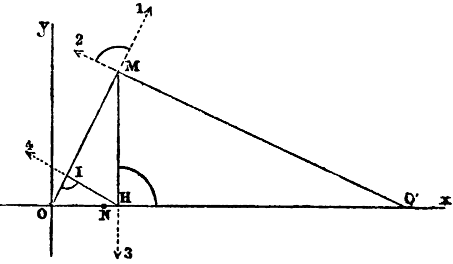


Fig. 113.

Soit OO′ un segment donné ; effectuons la construction (1, 2, 3, 4, *fig. 113*), nous obtenons un point I, et en prenant

$$OO' = d, \qquad OI = \rho, \qquad MOO' = \omega,$$

nous avons

$$OM = d \cos \omega, \qquad MI = d \sin^2 \omega \cos \omega;$$

par suite,

$$\rho = d \cos^3 \omega. \qquad (2)$$

En convertissant cette équation en coordonnées cartésienne, et en supposant $A = d$, nous obtenons bien l'équation du Folium simple.

Tracé de la tangente. — De l'équation (2) on peut déduire une propriété remarquable de la normale en un point pris sur le Folium simple. Mais, comme nous allons le montrer, cette propriété appartient aux courbes, plus générales, qui correspondent à l'équation

$$\rho = d \cos^{2p+1} \omega, \qquad (1)$$

dans laquelle p désigne un nombre entier et positif.

Prenons deux points fixes OO' et répétons, comme l'indique la figure, p fois la construction visée plus haut. Des points H_1, I_1 nous déduisons des points analogues H_2, I_2; et, ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions aux points H_p, I_p.

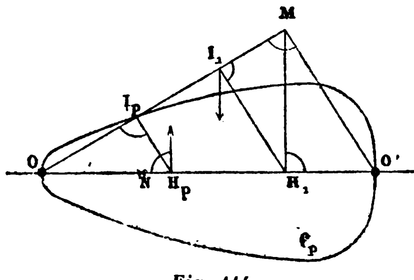


Fig. 114.

Nous avons alors

$$OH_1 = d \cos^2 \omega,$$

$$OH_2 = d \cos^4 \omega, \ldots \quad OH_p = d \cos^2{}_p \omega;$$

$$OI_1 = d \cos^3 \omega, \qquad OI_2 = d \cos^5 \omega, \ldots \quad OI_p = d \cos^{2p+1} \omega,$$

Le lieu décrit par le point I_p est donc une courbe f_p représentée, en coordonnées polaires, par l'équation (1).

Cherchons à déterminer la normale en un point I_p pris sur cette courbe f_p.

On sait (*C. M. S.*, t. II, p. 575) que l'équation de la normale est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos (\omega - \omega_1) + \frac{1}{\rho'_1} \sin (\omega - \omega_1).$$

Appliquons cette relation (1); nous obtenons, après calcul,

$$\frac{d}{\rho} \cos^{2p} \omega_1 = \frac{2p + 2}{2p + 1} \cos \omega + \left(\operatorname{tg} \omega_1 - \frac{\operatorname{cotg} \omega_1}{2p + 1}\right) \sin \omega.$$

Parmi les solutions remarquables de cette équation, on observera la suivante :

$$\omega = 0, \qquad \rho = \frac{2p+1}{2p+2}\,OH_p.$$

D'où nous concluons qu'en prenant sur OH_p un point N tel que

$$\frac{ON}{OH_p} = \frac{2p+1}{2p+2},$$

N est le pied de la normale.

En particulier, si nous revenons au folium simple f_1, *(fig. 113)* supposant par conséquent $p = 1$, nous voyons que le pied de la normale au point I s'obtiendra en prenant

$$ON = \frac{3}{4}\,OH.$$

Parmi les conséquences remarquables de cette construction, on peut observer que *le rayon de courbure au point* O *est nul.*

128. Remarque. — Il est naturel, après avoir considéré les courbes qui correspondent à l'équation (1) du paragraphe précédent, d'examiner celles qui sont représentées par l'équation

$$\rho = d\cos^{2p}\omega; \tag{2}$$

puis, de supposer, dans les formules (1) et (2), p positif ou négatif. De la sorte, le problème qui nous occupe se trouvera donc résolu pour toutes les équations

$$\rho = d\cos^{m}\omega, \tag{3}$$

quel que soit l'entier m, positif ou négatif.

Pour avoir les courbes (2), il faut projeter les points H_1, H_2, ... H_p, non plus sur OM, mais sur la droite qui va du point M au milieu de OO'.

Le degré de ces courbes s'élève très vite; le cas le plus simple, celui qui correspond à $p = 1$, donne déjà une courbe du sixième ordre; cette courbe a la forme d'un double ovale et l'on trouve, soit par la considération de l'équation de la tangente en coordonnées polaires, soit par celle de la normale, d'élégantes constructions pour le tracé de ces droites. Sans nous attarder sur ces détails faciles à vérifier, nous allons, pour donner un nouvel exemple remarquable de cette mé-

thode, l'appliquer au cas particulier où dans l'équation (3) on suppose $m = -2$. On obtient ainsi une quartique très simple qui a déjà fait l'objet de notes diverses (*) parce qu'elle présente cette particularité, toujours recherchée, d'avoir des points d'inflexion qui peuvent se déterminer par la règle et le compas. Nous allons montrer que les tangentes de cette quartique se déterminen tbien simplement avec la règle et l'équerre.

Prenons trois points en ligne droite O, O', O″ et tels que $O'O = OO'' = \frac{h}{4}$; puis effectuons la construction (1, 2, 3, 4, 5, *fig.* 115); nous trouvons ainsi un point I dont le lieu est une courbe U représenté par l'équation

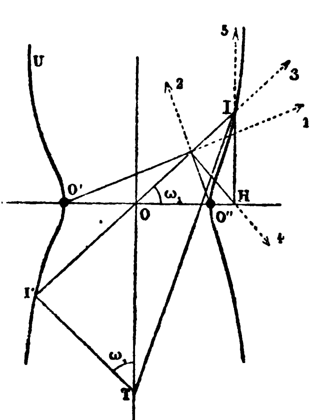


Fig. 115

$$\rho = \frac{h}{\cos^2 \omega}.$$

Proposons-nous de déterminer la tangente au point I (ρ_1, ω_1), à cette courbe.

L'équation de la tangente à une courbe, en coordonnées polaires (*C. M. S.*, p. 573), étant

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos(\omega - \omega_1) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)' \sin(\omega - \omega_1);$$

Nous avons, dans le cas présent,

$$\frac{2h}{\rho} = (1 + \cos 2\omega_1) \cos(\omega - \omega_1) - 2 \sin 2\omega_1 \sin(\omega - \omega_1).$$

En faisant $\omega = 90^0$ dans cette relation, nous trouvons que la tangente en I coupe l'axe des y en un point T tel que

$$OT = -OI \sin \omega_1.$$

De cette remarque nous pouvons conclure qu'en prenant le point I' symétrique de I par rapport au centre O et en élevant en I' une perpendiculaire à I'I, cette perpendiculaire va couper l'axe Oy au même point T que la tangente cherchée.

(*) *Nouvelles Annales*, 1843, p. 232 1845, p. 319; 1846, p. 214.

En prenant l'équation de la normale, on arrive à une conclusion qui est aussi très simple et que l'on pourra : soit vérifier directement, soit déduire du tracé précédent (*).

Voici quelle est cette propriété.

Élevons au point I une perpendiculaire au rayon vecteur; cette droite rencontre l'axe en un point K; si nous prenons KN = OK, IN est la normale cherchée (**).

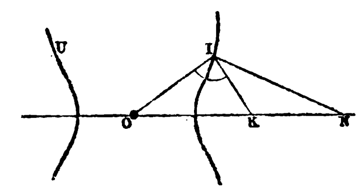


Fig. 116.

129. Les quartiques pyriformes. — Ces quartiques affectent la forme d'un simple folium présentant un axe de symétrie et un point de rebroussement; elles correspondent à l'équation

$$x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0,$$

dans laquelle a et b désignent deux longueurs données. Ces courbes ont fait l'objet, du moins dans des cas particuliers que nous signalerons tout à l'heure, de diverses recherches (***). Elles offrent plus d'une propriété remarquable : 1° on peut les construire par points et par tangentes, très simplement, avec la règle et l'équerre; 2° toutes ces courbes se déduisent de

(*) Nous aurons d'ailleurs occasion, dans la deuxième partie de ce ouvrage, d'utiliser la propriété géométrique assez curieuse que nous rencontrons ici.

(**) Dans l'article que nous avons cité plus haut et qui est inséré dans le tome V des *Nouvelles Annales* (1846), on trouve une construction de la tangente à la courbe qui vient de nous occuper, mais cette construction est moins simple que celles que nous proposons ici et, de plus, elle exige l'emploi d'arcs de cercle.

Dans une note qui accompagne cet article, note non signée mais qui est évidemment due à Terquem, il est dit : « Descartes (*Œuvres*, t. V, p. 336, édition Cousin) a imaginé un instrument formé de deux règles à l'aide duquel il construit d'un mouvement continu et simultanément les courbes données par les équations polaires

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos^4\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos^6\omega}, \ldots \text{»}$$

(***) O. Bonnet, *Nouvelles Annales* 1844, p. 75. — Brocard, *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, 1880; pp. 91, 121, 213, et *Mathesis*, t. III, 1883, pp. 23, 116, 191; t. V, p. 227. — J. Mister, *Mathesis*, 1881, pp. 78 et 128.

l'une d'elles par voie projective; 3° on peut déterminer le point le plus haut de la courbe et ses points d'inflexion; 4° l'aire de la courbe peut être calculée, elle se déduit en celle du cercle générateur en multipliant celle-ci par un rapport connu, etc...

Nous allons établir ces diverses propriétés.

1° *Génération des pyriformes.* Imaginons un cercle O et deux diamètres rectangulaires AB, CD, puis effectuons la construction (1, 2, 3, *fig. 117*); nous obtenons ainsi un point I. L'équation du lieu géométrique décrit par ce point est facile à trouver. Prenons pour axe des x le diamètre AB et pour axe des y la tangente en A du cercle O et posons

$$IAB = \alpha,$$
$$AH = b,$$
$$AB = a.$$

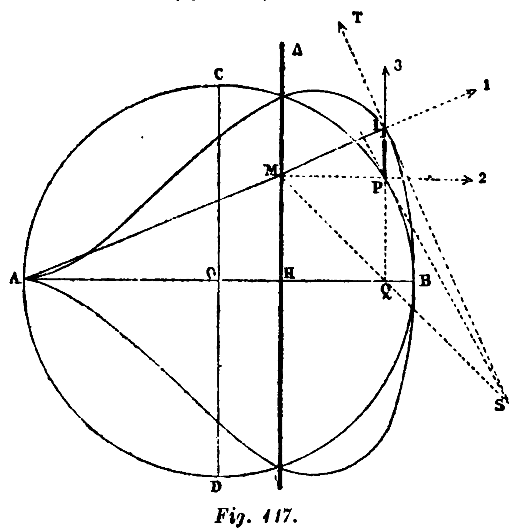


Fig. 117.

Nous avons d'abord

$$\overline{PQ}^2 = \overline{MH}^2 = x(a - x),$$

ou

$$b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = x(a - x).$$

D'ailleurs

$$y = x \operatorname{tg} \alpha;$$

le lieu du point I est donc une courbe, affectant la forme qu'indique la figure et correspondant à l'équation

$$b^2 y^2 = x^3(a - x). \qquad (P)$$

2° *Les pyriformes sont projectives.* En effet, si l'on transforme l'équation (P) au moyen des formules

$$by = aY, \qquad x = X$$

on a

$$a^2 Y^2 = X^3(a - X). \qquad (P')$$

Cette équation (P') représente une pyriforme particulière;

c'est celle qui a été étudiée par M. O. Bonnet *(loc. cit.)*, en supposant $a = 1$. Mais, lorsque a varie, toutes les courbes (P′) sont homothétiques et l'on peut, sans restreindre la généralité des propriétés de la courbe étudiée, faire l'hypothèse $a = 1$.

Quant aux courbes (P), elles se déduisent toutes, par voie projective, d'une courbe (P′), en supposant : 1° que b varie, 2° que l'on donne à a la même valeur dans (P) et dans (P′).

En effet, on a reconnu dans les formules de transformation que nous avons prises, celles qui servent à transformer l'ellipse en cercle. La méthode classique qui sert à l'étude de l'ellipse, considérée comme la projection du cercle s'applique donc aux pyriformes et les propriétés signalées par M. O. Bonnet pour la pyriforme particulière (P′), celles qu'on pourrait encore trouver pour cette courbe, s'appliquent, avec les modifications ordinaires, aux pyriformes plus générales que nous avons définies tout à l'heure.

3° *Points d'inflexion*, etc... Pour n'en citer qu'un exemple, M. O. Bonnet a démontré que les points d'inflexion de (P′) avaient pour coordonnées.

$$X = a\,\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \qquad Y = \pm\frac{a}{8}\sqrt{6\sqrt{3}-9}.$$

Pour une pyriforme quelconque les points d'inflexion ont pour coordonnées

$$x = a\,\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \qquad y = \pm\frac{a^2}{8b}\sqrt{6\sqrt{3}-9};$$

Mais il faut observer que la détermination de ces points exige l'emploi du compas.

Il en est de même du point le plus haut des pyriformes. Ce point a pour coordonnées

$$x = \frac{3a}{4}, \qquad y = \frac{3a\sqrt{3}}{16}$$

pour la courbe (P′); pour une pyriforme quelconque ce point est représenté par

$$x = \frac{3a}{4}, \qquad y = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16b}.$$

4° *Quadrature des pyriformes.* La méthode des projections permet encore de déterminer l'axe de la courbe, par des consi-

dérations géométriques que nous allons donner. On évite ainsi le calcul, relativement pénible, de l'intégrale définie

$$\frac{1}{b}\int_0^a x\sqrt{x(a-x)}dx.$$

Prenons d'abord la pyriforme de M. O. Bonnet, courbe qu'on obtient en supposant $b = a$, auquel cas Δ est tangente au cercle générateur au point B.

Si nous appliquons la construction exposée plus haut, au cas particulier visé en ce moment, nous trouvons sur le rayon vecteur AM deux points I, I' de la courbe et les propriétés élémentaires de la figure donnent

$$P'I' = QI.$$

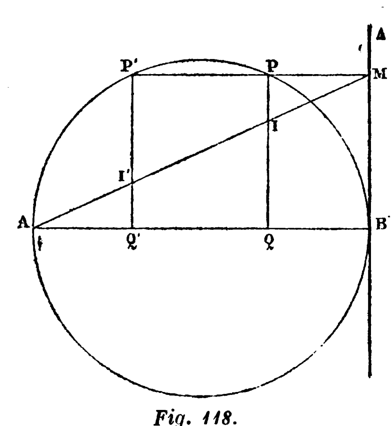


Fig. 118.

On conclut de cette remarque, reconnue autrement par M. O. Bonnet, que l'*aire de courbe considérée est la moitié de celle du cercle générateur.*

Pour une pyriforme quelconque l'aire s'obtient en multipliant celle de (P') par le rapport $\frac{a}{b}$; concluons donc que l'*aire totale d'une pyriforme quelconque représentée par l'équation* (P) *est égale à* $\frac{\pi a^3}{2b}$.

5° *Tracé de la tangente.* On a dû observer que le tracé point par point que nous avons donné pour les pyriformes présente ces courbes comme des transformées du cercle par la méthode de Mac-Laurin. Le tracé de la tangente peut donc être effectué, avec la règle et l'équerre, conformément aux principes que nous avons déjà utilisés. La *fig. 117* rappelle comment ces principes ont été appliqués pour obtenir la tangente IT à la pyriforme (*).

(*) Pour la construction, point par point, des pyriformes, avec la règle et l'équerre, il est bien entendu que le cercle O dont il a été question

130. Réflexions générales. — Beaucoup d'autres quartiques, et aussi certaines courbes d'un ordre plus élevé, sont susceptibles d'être tracées par points et par tangentes au moyen de la règle et de l'équerre. La *Kreuzcurve* et la quartique γ_4 dont nous avons parlé ailleurs (*Journal* 1885, p. 272 et 1886, p. 202); la *rosace à quatre feuilles* (*Géométrie analytique*, p. 597); la *Kohlenspitzencurve* de M. Schoute (*Archiv von Grünert*, 1885); les *hypocycloïdes à trois ou quatre rebroussements* etc., et leurs *podaires*, donneraient lieu à d'intéressants développements dans l'ordre d'idées qui dirige ce travail; mais cette exposition nous entraînerait bien loin. Nous avions eu aussi la pensée, à laquelle nous renonçons, pour le même motif, et avec plus de regrets, de terminer la première partie de cet ouvrage par l'exposition de certaines méthodes de transformation permettant de multiplier, à l'infini, les tracés de la règle et de l'équerre dans la construction des courbes, par points et par tangentes. Nous donnerons un seul exemple des applications auxquelles nous venons de faire allusion, en prenant l'idée de la transformation réciproque, dans la géométrie cartésienne.

Théorème. — *Si, au moyen de la règle et de l'équerre, on sait construire, par points et par tangentes, la courbe* U *d'ordre* p *qui correspond à l'équation*

$$f(x, y) = 0,$$

on peut aussi, dans ces mêmes conditions, construire la courbe U *d'ordre* 2p *qui correspond à l'équation*

$$f\left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}\right) = 0.$$

Sur les axes Ox, Oy on donne quatre points A, A'; B, B', tels que

$$OA = A'O = a, \qquad OB = B'O = b;$$

soient

$$m(x, y), \qquad M(X, Y)$$

---

ne doit pas être tracé ; on détermine d'abord le point P par le moyen de deux droites rectangulaires issues des extrémités A et B du diamètre AB; puis le point M, etc.

deux points correspondants, dans *la transformation réciproque cartésienne*. nous avons alors

$$xX = a^2, \qquad yY = b^2;$$

telles sont les formules de la transformation en question.

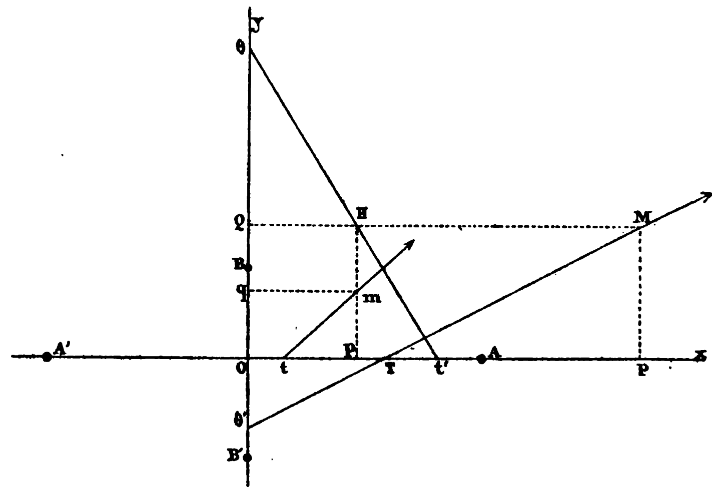


Fig. 119.

Au point p correspond un point P, conjugué harmonique de p par rapport au segment AA'; de même à q correspond Q conjugué harmonique de q par rapport aux points B et B'.

D'après cela, au point m correspond un point M et les constructions qui conduisent de m à M n'exigent que l'emploi de la règle et de l'équerre.

La détermination de la tangente est plus délicate.

Il s'agit de montrer comment, connaissant la tangente en m à u, on peut, avec la règle et l'équerre, construire la tangente en M à la courbe U, transformée de u.

Les formules (L) donnent

$$xdX + X\,dx = 0, \qquad ydY + Ydy = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{X}\cdot\frac{Y}{\left(\frac{dY}{dX}\right)}. \qquad (1)$$

Soient *mt* la tangente donnée, MT la tangente inconnue; on a donc

$$y = pt\,\frac{dy}{dx}, \qquad y = \mathrm{PT}\,\frac{dY}{dX}.$$

La relation (1) devient

$$\frac{pt}{Op} = \frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{OP}}.$$

Ainsi la ponctuelle (O, t, p) est homothétique à la ponctuelle (O, T, P) et cette remarque permet de déterminer le point T, connaissant les quatre points (O, t, p, P) de plusieurs façons, toutes, très simples.

Mais la difficulté inhérente au sujet que nous traitons et à laquelle nous avons fait allusion tout à l'heure, tient à ce que nous ne nous accordons que l'usage de la règle et de l'équerre et, cette condition étant imposée, nous avons à montrer comment nous déterminons le point inconnu T.

Prolongeons *pm* jusqu'à sa rencontre en H avec MQ et joignons H au point t' symétrique de t par rapport à p; t'H rencontre oy en θ et nous avons

$$\frac{t'p \text{ ou } tp}{Op} = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{Q}\theta}. \qquad (2)$$

D'autre part, la droite MT rencontre oy en un point θ' et nous pouvons observer que

$$\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{MP} \text{ ou } \mathrm{OQ}}{\theta'\mathrm{Q}}. \qquad (3)$$

Comparant (2) et (3) nous en déduisons

$$\theta\mathrm{Q} = \mathrm{Q}\,\theta'.$$

Les deux points θ, θ' sont donc symétriques l'un de l'autre par rapport à Q.

De cette remarque résulte une construction de la tangente MT, par des tracés qui n'exigent, comme l'on voit, que l'emploi de la règle et de l'équerre (*).

(*) Nous terminons ici la première partie de la *géométrie de la règle et de l'équerre;* la seconde partie, qui est purement élémentaire, paraîtra régulièrement dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* à partir du n° de Janvier 1887.

BIBLIOGRAPHIE

A SYNOPSIS OF ELEMENTARY RESULTS IN PURE MATHEMATICS,... by *G. S. Carr* (London : Francis Hodgson, 89, Farringdon Street, Price 34 s).

Ce livre dont la lecture est facile, même à ceux qui n'ont qu'une faible connaissance de la langue anglaise, est un résumé très complet et clairement ordonné des principaux théorèmes de la géométrie, des formules de l'algèbre, de la trigonométrie, du calcul différentiel, du calcul intégral, de la géométrie analytique, etc. C'est un véritable formulaire mathématique, plein de renseignements précieux et, entre parenthèses, il serait fort à désirer qu'il existât un ouvrage de ce genre, écrit dans notre langue. Le Dictionnaire de M. Sonnet ne remplit pas le même but que le livre de M. Carr et nous appelons sur celui-ci l'attention de nos lecteurs. Toute la nouvelle terminologie mathématique s'y trouve expliquée; et ce n'est pas un petit service que rend ainsi ce précieux volume. G. L.

QUESTION 116

Solution.

Construire la podaire de l'origine par rapport à la courbe U *représentée par l'équation*

$$x^3 + y^3 - a^3 = 0. \qquad (a > 0)$$

L'observation faite au commencement de la solution donnée plus loin pour la question 117 s'applique aussi à celle-ci.

Soient α, β les coordonnées d'un point de U ; on trouve immédiatement pour les coordoneées x, y d'un point du lieu les valeurs

$$x = a^3 \frac{\alpha^2}{\alpha^4 + \beta^4}, \qquad y = a^3 \frac{\beta^2}{\alpha^4 + \beta^4}.$$

On voit d'abord que x et y sont positifs; la courbe est renfermée *dans le premier quadrant*. En introduisant les coordonnées polaires ρ, ω, les formules précédentes donnent

$$\frac{\sin\omega}{\beta^2} = \frac{\cos\omega}{\alpha^2} = \frac{\rho}{a^3},$$

et, en tenant compte de la relation $\alpha^3 + \beta^3 = a^3$, on a pour

l'équation polaire du lieu

$$\rho^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \left\{ \sin^{\frac{3}{2}} \omega + \cos^{\frac{3}{2}} \omega \right\}.$$

La courbe correspondante présente un rebroussement à l'origine; la tangente de rebroussement est en même temps l'axe de symétrie. La courbe est tangente aux axes ox, oy aux points (a, o), (o, a); elle n'a pas de points à l'infini; sa forme générale résulte alors de ces remarques diverses.

G. L.

QUESTION 117

Solution.

Étudier les formes successives de la courbe représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 - 3axy + \lambda = o \qquad (a > o). \qquad (1)$$

Cette question, proposée autrefois (mars 1884), a probablement paru trop simple car nous n'avons reçu pour elle qu'un très petit nombre de solutions; encore celles-ci présentent-elles des fautes graves, ce qui semble prouver, et la chose n'est d'ailleurs que trop facile à constater en assistant aux examens de l'École Polytechnique, combien le problème de la construction des courbes est négligé par les candidats.

La discussion des formes diverses affectées par les courbes qui correspondent à l'équation proposée se fait très simplement en observant d'abord que l'identité bien connue

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c)}{2} \left\{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right\}$$

permet d'écrire l'équation (1) sous la forme

$$\frac{(x+y+a)}{2} \left\{ (x-y)^2 + (a-x)^2 + (a-y)^2 \right\} + \lambda - a^3 = o. \quad (\Gamma)$$

La discussion porte alors, naturellement, sur ces trois hypothèses, que l'on doit aborder successivement:

$$\lambda - a^3 > o, \qquad \lambda - a^3 = o, \qquad \lambda - a^3 < o.$$

La droite Δ qui a pour équation $x + y + a = o$ est

l'asymptote réelle de la courbe et celle-ci est située, toute entière, du même côté par rapport à Δ.

La première bissectrice est un axe de symétrie; en cherchant les sommets de (Γ) on est conduit à l'équation

$$2x^3 - 3ax^2 + \lambda = 0. \qquad (2)$$

Si λ est nul, l'équation (1) représente le folium de Descartes; et si $\lambda = a^3$, la cubique se décompose en une droite et un point. Écartons ces deux cas particuliers. Alors, λ étant différent de zéro, cette équation a une racine réelle, si $\lambda - a^3$ est positif; la courbe a la forme d'une branche conchoïdale; elle a trois racines réelles, si l'on suppose

$$0 < \lambda < a^3.$$

L'équation (2) prouve qu'il y a deux racines positives et une négative; la courbe est formée: 1° d'une branche conchoïdale; 2° d'un ovale extérieur à la région qui est comprise entre cette branche et son asymptote.

Enfin, si λ est négatif, l'équation (2) n'admet qu'une racine réelle, puisqu'il manque un terme entre deux termes de même signe; la courbe est encore constituée par une seule branche conchoïdale. G. L.

QUESTION 129

Solution par M. Henri Ferval, élève au Lycée Henri IV (Classe de M. Macé de Lépinay).

Trouver toutes les équations du troisième degré telles que si x_1 *est une de leurs racines convenablement choisie, les deux autres soient*

$$-\frac{x_1+1}{x_1} \quad et \quad -\frac{1}{1+x_1}. \qquad \text{(Weill.)}$$

Observons que le produit des trois racines est égal à 1. De là, nous concluons que le produit de deux racines est égal à l'inverse de la troisième; nous avons donc pour la somme des produits deux à deux des racines :

$$\frac{1}{x_1} - (1 + x_1) - \frac{x_1}{x_1+1} = -\left(-\frac{1}{x_1} - 1 + x_1 - \frac{1}{1+x_1}\right)$$
$$-3 = -(\lambda + 3),$$

λ étant un paramètre arbitraire, qui désigne la somme des racines. Les équations cherchées ont donc la forme générale :

$$x^3 - \lambda x^2 - (\lambda + 3)x - 1 = 0.$$

NOTA. — Solution analogue par M. Paul Bourgarel.

QUESTION 130

Solution par M. Paul BOURGAREL, à Antibes.

Trouver les équations du sixième degré telles que, si x_1 *est une quelconque de leurs racines, les autres soient :*

$$\frac{1}{x_1} - (1 + x_1) - \frac{1}{1 + x_1} - \frac{x_1}{1 + x_1} - \frac{x_1 + 1}{x_1}.$$

(Weill.)

On voit immédiatement que les équations cherchées sont réciproques, car le produit des racines prises deux à deux est égal à 1.

D'après la question précédente, l'équation générale du troisième degré admettant pour racines :

$$x_1 \quad -\frac{1}{1 + x_1} \quad -\frac{x_1 + 1}{x_1},$$

est :

$$U = x^3 - \lambda x^2 - (\lambda + 3)x - 1 = 0.$$

L'équation générale du troisième degré admettant pour racines

$$\frac{1}{x_1}, \quad -(1 + x_1), \quad -\frac{x_1}{1 + x_1}$$

est l'équation aux inverses des racines de cete équation, c'est-à-dire :

$$V = x^3 + (\lambda + 3)x^2 + \lambda x - 1 = 0.$$

L'équation générale cherchée est donc

$$UV = 0.$$

NOTA. — Solution analogue par M. Henri Feval.

QUESTIONS PROPOSÉES

212. — Soit $A_1A_2A_3A_4$ un quadrilatère normal inscrit à une ellipse Γ ; c'est-à-dire, un quadrilatère tel que les normales en ces points soient concourantes. Les tangentes à Γ en ces mêmes points rencontrent la tangente à l'une des extrémités A du grand axe AA' en quatre points $B_1B_2B_3B_4$; démontrer que l'on a

$$AB_1 . AB_2 . AB_3 . AB_4 = -b^4,$$

et

$$\Sigma AB_1 . AB_2 = o.$$

(G. L.)

213. — On considère deux paraboles PP' qui, ayant même sommet O, se coupent orthogonalement en ce point. Autour du point O on fait tourner deux droites rectangulaires et on obtient ainsi : sur P, deux points a et b ; sur P', deux autres points a' et b'. Si on prend trois des quatre points a, b, a', b' pour former un triangle, le quatrième est l'orthocentre de ce triangle. *(Beaurepaire.)*

214. — Soit une courbe du quatrième degré ayant deux points doubles à l'infini. En général, il n'est pas possible de lui inscrire un parallélogramme dont les côtés soient parallèles aux asymptotes. Si la chose est possible, elle l'est d'une infinité de manières. On demande alors le lieu des centres de ces parallélogrammes. *(E. C.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24520-6.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS